

Dumitru DELEANU



Cuvânt înainte

Mecanica este una dintre științele fundamentale ale naturii, cu un domeniu foarte larg de cercetare, și care are ca obiect mișcarea mecanică a sistemelor materiale. În decursul timpului mecanica s-a diferențiat în trei ramuri distincte: mecanica clasică, mecanica relativistă și mecanica cuantică.

Mecanica clasică (newtoniană), având ca fondatori pe savantul Italian Galileo Galilei (1564-1642) și pe fizicianul, matematicianul și astrologul englez Isaac Newton (1642-1727), cuprinde legile mișcării macroobiectelor a căror viteză este mică în comparative cu viteza undelor electromagnetice în vid. Mecanica newtoniană este considerată prima știință teoretică a naturii. Ea s-a diferențiat, la rândul ei, în două părți: mecanica clasică și mecanica aplicată.

Obiectul de studiu al prezentei lucrări, mecanica teoretică, numită și mecanica generală sau rațională, se ocupă de mișcarea sistemelor materiale formate din obiecte ale căror deformări sunt practice neglijabile.

Lucrarea reprezintă a doua ediție a cursului de Mecanică teoretică predate de autor studenților Universității Maritime din Constanța precum și suportul orelor de seminar, dar poate fi consultată și de cadre tehnice din domeniul industriei și cercetării, de studenții institutelor tehnice de învățământ superior sau de cadrele didactice care predau mecanica în liceele cu profil industrial. Materia este prezentată în succesiunea clasică : statica, cinematica și dinamica. Fiecare din cele 16 capitole este structurat în patru secțiuni. Prima dintre ele este dedicată noțiunilor teoretice aferente temei dezbătute. Urmează apoi un set de probleme reprezentative complet rezolvate, structurate în strânsă concordanță cu rezultatele teoretice prezentate anterior. A treia secțiune conține probleme propuse spre rezolvare iar în finalul capitoului se dau indicații și răspunsuri pentru aceste aplicații. Se oferă astfel cititorului posibilitatea să poată aprofunda și aplica fără mari dificultăți teoremele și metodele de calcul ale Mecanicii. Totodată, această abordare structurată este în concordanță cu nevoile unor discipline care utilizează în mod nemijlocit cunoștințele de mecanică : Rezistența materialelor, Organe de mașini, Teoria mecanismelor și a măsurilor etc.

Autorul s-a străduit să urmeze drumul “Școlii Românești de mecanică”, caracterizat printr-o prezentare clară, sistematică și riguros matematică, deschis de Spiru Haret (1851-1912), Traian Lalescu (1882-1929) etc, și continuat de Victor Valcovici (1885-1969), Caius Iacob (1912-1991) și de o suită întreagă de mecanicieni în viață, în plină putere de creație, și care activează cu multă dăruire pentru progresul acestei științe.

Sperăm că lucrarea de față va reuși nu numai să fie de real folos studenților care se pregătesc pentru examene, ci să trezească pentru unii sau să mențină pentru alții interesul pentru descifrarea tainelor și farmecului Mecanicii teoretice.

Autorul mulțumește în mod deosebit doamnei ing. Elena Bogdan pentru competența tehnoredactare și “sufletul “ pus în apariția acestei lucrări.

Autorul

CUPRINS

PREFAȚĂ	3
CUPRINS	5
1. NOTIUNI INTRODUCTIVE	9
1.1. Obiectul mecanicii	9
1.2. Principiile mecanicii clasice	10
1.3. Diviziunile mecanicii clasice	10
1.4. Modele ale mecanicii clasice	10
2. ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL	12
2.1. Scalari si vectori	12
2.2. Proiecția unui vector pe un plan si pe o dreapta.....	14
2.3. Operații cu vectori liberi.....	15
2.3.1. Adunarea vectorilor liberi	15
2.3.2. Inmulțirea unui vector liber cu un scalar.....	16
2.3.3. Produsul scalar a doi vectori liberi.....	17
2.3.4. Produsul vectorial a doi vectori liberi	19
2.3.5. Dublul produs vectorial a trei vectori liberi	20
2.3.6. Produsul mixt a trei vectori liberi	20
PARTEA ÎNȚĂIA : STATICA	
3. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE	22
3.1. Forțe și sisteme de forțe	22
3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct	22
3.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă.....	24
3.4. Torsorul unei forțe în raport cu un punct	25
3.5. Torsorul unui sistem de forțe în raport cu un punct	27
3.6. Torsor minimal. Axă centrală	30
3.7. Cazuri de reducere ale unui sistem de forțe oarecare.....	31
3.8. Reducerea sistemelor particulare de forțe	33
3.9. Probleme rezolvate	36
3.10. Probleme propuse	44
3.11. Indicații și răspunsuri	46
4. CENTRE DE MASĂ	49
4.1. Greutatea corpurilor.....	49
4.2. Centrul de masă/greutate al unui sistem de puncte materiale	49
4.3. Centrul de masă al unui solid rigid	50
4.4. Proprietăți ale centrului de masă.....	52
4.5. Momente statice. Teorema momentelor statice	53
4.6. Probleme rezolvate	54
4.7. Probleme propuse	58
4.8. Indicații și răspunsuri	59
5. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL	62
5.1. Noțiuni introductive.....	62

5.2. Echilibrul punctului material liber	62
5.3. Echilibrul punctului material legat. Axioma legăturilor Clasificarea legăturilor	63
5.4. Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare	64
5.5. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare Legile frecării uscate. Conuri de frecare	66
5.6. Probleme rezolvate	69
5.7. Probleme propuse	72
5.8. Indicații și răspunsuri	74
6. ECHILIBRUL RIGIDULUI.....	77
6.1. Echilibrul rigidului liber	77
6.2. Echilibrul rigidului supus la legături. Generalități	78
6.3. Echilibrul rigidului supus la legături fără frecare Reazemul simplu. Articulația. Încăstrarea	78
6.4. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare. Tipuri de frecare. Ecuații de echilibru	82
6.5. Probleme rezolvate	89
6.6. Probleme propuse	95
6.7. Indicații și răspunsuri	97
7. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE SI DE SOLIDE RIGIDE	100
7.1. Condiții de echilibru ale unui sistem de forțe ce acționează asupra unui sistem de puncte materiale	100
7.2. Teoreme și metode pentru rezolvarea problemelor de statica sistemelor	101
7.3. Probleme rezolvate	102
7.4. Probleme propuse	110
7.5. Indicații și răspunsuri	113

PARTEA A DOUA : CINEMATICA

8. CINEMATICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL	119
8.1. Traiectorie, viteză și accelerație	119
8.2. Expresiile analitice ale vitezei și accelerației în diferite sisteme de coordonate	121
8.3. Mișcări particulare ale punctului material . Mișcarea rectilinie și mișcarea circulară	125
8.4. Probleme rezolvate	128
8.5. Probleme propuse	133
8.6. Indicații și răspunsuri	134
9. CINEMATICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A SOLIDULUI RIGID.....	137
9.1. Mișcarea generală a rigidului	137
9.2. Mișcări particulare ale solidului rigid	141
9.2.1. Mișcarea de translație a rigidului	141
9.2.2. Mișcarea de rotație a rigidului	142
9.2.3. Mișcarea elicoidală a rigidului	146
9.2.4. Mișcarea plan – paralelă a rigidului	148
9.2.5. Mișcarea sferică a rigidului	151
9.3. Distribuția de viteze și accelerații în mișcarea generală a rigidului	154
9.4. Probleme rezolvate	156

9.5. Probleme propuse	168
9.6. Indicații și răspunsuri	169
10. MIȘCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL	173
10.1. Definiții și exemple	173
10.2. Derivata relativă și derivata absolută a unui vector	174
10.3. Compunerea vitezelor	175
10.4. Compunerea accelerațiilor	175
10.5. Probleme rezolvate	176
10.6. Probleme propuse	185
10.7. Indicații și răspunsuri	187
11. MIȘCAREA RELATIVĂ A SOLIDULUI RIGID	190
11.1. Generalități	190
11.2. Compunerea vitezelor	191
11.3. Compunerea accelerațiilor	192
11.4. Cazuri particulare. Compuneri de mișcări instantanee	193
11.5. Probleme rezolvate	195
11.6. Probleme propuse	200
11.7. Indicații și răspunsuri	201
PARTEA A TREIA : DINAMICA	
12. DINAMICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL	202
12.1. Dinamica punctului material liber	202
12.2. Dinamica punctului material cu legături	204
12.3. Probleme rezolvate	204
12.4. Probleme propuse	209
12.5. Indicații și răspunsuri	211
13. DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL	214
13.1. Ecuația fundamentală a mișcării relative	214
13.2. Repaus relativ	214
13.3. Sisteme de referință inerțiale	215
13.4. Probleme rezolvate	216
13.5. Probleme propuse	221
13.6. Indicații și răspunsuri	222
14. MOMENTE DE INERȚIE MECANICE	224
14.1. Definiții	224
14.2. Relații între momentele de inerție	225
14.3. Variația momentelor de inerție față de axe paralele. Teorema lui Steiner	225
14.4. Variația momentelor de inerție față de axe concurente	227
14.5. Axe și momente de inerție principale	228
14.6. Probleme rezolvate	229
14.7. Probleme propuse	234
14.8. Indicații și răspunsuri	235
15. TEOREMELE GENERALE ÎN DINAMICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE ȘI A SOLIDULUI RIGID	237
15.1. Teorema impulsului	237
15.1.1. Impulsul unui sistem de puncte materiale și al unui solid rigid	237

15.1.2. Teorema impulsului. Teorema mișcării centrului de masă	238
15.1.3. Teorema conservării impulsului	239
15.2. Teorema momentului cinetic	240
15.2.1. Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale si al unui solid rigid. Teorema lui Koenig pentru moment cinetic	240
15.2.2. Expresii ale momentului cinetic în diferite mișcări particulare ale rigidului	241
15.2.3. Teorema momentului cinetic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid în raport cu un reper fix	243
15.2.4. Teorema momentului cinetic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid în jurul centrului de masă	244
15.2.5. Teorema conservării momentului cinetic	244
15.3. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic	245
15.3.1. Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale și a unui solid rigid. Teorema lui Koenig pentru energie cinetică	245
15.3.2. Lucrul mecanic elementar și lucrul mecanic finit al unei forțe	246
15.3.3. Forme ale energiei cinetice în diferite mișcări particulare ale rigidului	246
15.3.4. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid în raport cu un reper fix	248
15.3.5. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid în raport cu centrul de masă	250
15.3.6. Conservarea energiei mecanice	251
15.4. Probleme rezolvate	252
15.5. Probleme propuse	258
15.6. Indicații și răspunsuri	260
16. DINAMICA RIGIDULUI	269
16.1. Dinamica rigidului cu axă fixă	269
16.1.1. Formularea problemei	269
16.1.2. Studiul mișcării rigidului	270
16.1.3. Determinarea reacțiunilor	270
16.1.4. Echilibrul rotorilor	272
16.2. Dinamica rigidului cu un punct fix	273
16.2.1. Formularea problemei	273
16.2.2. Deducerea ecuațiilor de mișcare	274
16.2.3. Determinarea reacțiunilor	x
16.2.4. Giroscopul : Stabilitate, efect giroscopic, mișcarea de precesie regulată, moment giroscopic	276
16.3. Dinamica mișcării plan – paralele	279
16.4. Dinamica rigidului în mișcarea generală	280
16.5. Probleme rezolvate	281
16.6. Probleme propuse	290
16.7. Indicații și răspunsuri	291
BIBLIOGRAFIE	295

1. Noțiuni introductive

1.1. Obiectul mecanicii

Mecanica este o ramură a științelor naturii care a apărut din cele mai îndepărtate timpuri. Această știință a avut un rol de seamă în dezvoltarea civilizației omenești, nașterea și dezvoltarea sa permanentă fiind o consecință a problemelor practice apărute în fiecare epocă, legate de construcții, transporturi etc. Mecanica studiază una dintre multiplele însușiri și manifestări ale materiei și anume *mișcarea*, prin aceasta înțelegând toate schimbările și procesele care au loc în univers începând cu simpla deplasare și terminând cu gândirea. Materia este inepuizabilă și ca atare și procesul cunoașterii ei.

Mecanica teoretică clasică sau **mecanica newtoniană** studiază una dintre cele mai simple forme de mișcare, cunoscută sub numele de *mișcare mecanică*, definită ca fiind *modificarea relativă a poziției unui corp sau a unei părți a acestuia în raport cu un alt corp considerat ca reper sau în raport cu un sistem de referință*. Dezvoltarea mecanicii s-a făcut simultan cu aceea a matematicii, progresele uneia din aceste științe antrenând progresele celeilalte. Din acest punct de vedere, mecanica a constituind un model și pentru alte științe de bază ale naturii (fizica, biologia, chimia), acestea urmând un proces de matematizare analog.

La dezvoltarea mecanicii au contribuit unii dintre cei mai mari savanți ai lumii. Simpla lor enumerare ar necesita prea mult spațiu. Vom aminti totuși savanții ce au avut o contribuție esențială la nașterea și dezvoltarea acestei științe.

De antichitate sunt legate numele lui **Aristotel** (384-322 î.e.n) și **Arhimede** (287-212 î.e.n). Primul a enunțat principiul inerției iar cel de-al doilea este considerat întemeietorul Staticii.

Perioada Renașterii conține și ea nume mari : **Leonardo da Vinci** (1452-1519), **Nicolaus Copernic** (1473-1543), **Johannes Kepler** (1571-1630), **C.R. Huygens** (1629-1695) etc.

Întemeietorii mecanicii clasice rămân însă marii savanți **Galileo Galilei** (1564-1642) și **Isaac Newton** (1642-1727). Galilei stabilește noțiunile de bază ale cinematicii, viteza și accelerația, studiază căderea corpurilor, mișcarea pe plan înclinat, formulează principiul inerției la forma actuală și susține cu mult curaj concepția heliocentrică a lui Copernic. Cel care extinde studiul mecanicii la întreg sistemul planetar și stabilește cea dintâi lege fizică scrisă sub forma unei ecuații diferențiale este, însă, Newton. El definește principiile fundamentale ale mecanicii și descoperă legea gravitației universale.

Savanți de referință întâlnim și în secolele XVII-XIX : **Leonard Euler** (1707-1783), **Jean LeRond D' Alembert** (1717-1783), **William Hamilton** (1805-1865), **Joseph Louis Lagrange** (1756-1813), **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), **Henri Poincare** (1854-1912) etc.

Mecanica modernă este legată de numele lui **Max Plank** (1858-1947), **Erwin Schrodinger** (1887-1961) și al lui **Albert Einstein** (1879-1955).

În țara noastră se disting prin cercetări în domeniul mecanicii **Spiru Haret** (1851-1912), **Andrei Ioachimescu** (1868-1943), **Traian Lalescu** (1882-1929), **Victor Vâlcovici** (1885-1970), **Caius Iacob** (1910-1991), **Radu Voinea** etc.

1.2. Principiile mecanicii clasice

La baza mecanicii clasice stau un număr de principii (legi sau axiome) formulate de Isaac Newton în lucrarea sa fundamentală „*Principiile matematice ale filozofiei naturale*” (1686). Acestea sunt :

Principiul inerției (legea I – a a lui Newton) : “*Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atâta timp cât nu intervin alte forțe care să-i modifice această stare*”

Principiul acțiunii forței (legea a II – a a lui Newton): “*Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia de acțiune a forței*”

Principiul acțiunii și reacțiunii (legea a III – a a lui Newton) : “*La orice acțiune corespunde întotdeauna o reacțiune egală și contrară*”

Principiul paralelogramului (corolarul I a lui Newton) : “*Un corp sub acțiunea a două forțe unite descrie diagonala unui paralelogram în același timp în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor*”.

Observații : i) În formulările celor patru principii, prin corp se înțelege un punct material (vezi secțiunea 1.4).

ii) În legea a II-a masa este considerată constantă (ca de altfel în întreaga mecanică clasică).

iii) Mișcarea este raportată la un sistem de referință absolut și imobil (fix).

iv) Principiul al doilea conduce la ecuația

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

(1.1)

unde m este masa punctului material, \vec{a} accelerația sa iar \vec{F} forța motoare imprimată.

1.3 Diviziunile mecanicii clasice

Din punct de vedere metodologic, mecanica newtoniană se împarte în trei mari capitole:

- I) **Statica** – se ocupă cu echilibrul corpurilor materiale, studiind sistemele de forțe care-și fac echilibrul precum și reducerea sistemelor de forțe.
- II) **Cinematica** – studiază mișcarea corpurilor fără să țină seama de forțele care le acționează și de masa lor. În cinematică se face un studiu geometric al mișcării mecanice.
- III) **Dinamica** – studiază mișcarea corpurilor cu luarea în considerare a forțelor care le acționează și a masei lor.

1.4. Modele ale mecanicii clasice

Pentru simplificarea studiului, în mecanică corpurile reale se înlocuiesc prin schematizări ale lor, denumite **modele**. Rezultatele studiului pe modele se extind pe

corpurile reale în măsura în care acestea corespund condițiilor luate în considerare la efectuarea studiului, iar experiența confirmă rezultatele. Modelele mecanicii clasice sunt:

Punctul material – un punct geometric căruia i se atribuie masă, reprezentând cea mai mică diviziune dintr-un corp, și care păstrează toate proprietățile fizice ale corpului cu neglijarea dimensiunilor acestuia.

Sistemul de puncte materiale – o mulțime finită de puncte materiale aflate în interacțiune și care ocupă un anumit domeniu finit al spațiului.

Continuul material – modelul unui corp la care se admite că orice element de volum conține materie, adică are masă.

Corpul solid rigid (rigidul)- un continuu material nedeformabil, oricare ar fi sistemul de forțe ce acționează asupra lui.

Corpul solid real suferă deformații (elastice și plastice) pe care însă mecanica clasică le neglijează. Folosind aceste modele se va studia separat mecanica punctului material, a sistemului de puncte materiale și a solidului rigid.

În mecanică se utilizează atât clasa mărimilor fundamentale – spațiul, timpul, masa – dar și o serie de mărimi derivate cum ar fi forța, viteza, accelerația, impulsul, lucru mecanic, energia cinetică etc.

2. Elemente de calcul vectorial

2.1. Scalari și vectori

Multe mărimi fizice pot fi definite complet prin intermediul unui singur număr invariabil la alegerea unui anumit reper. Astfel de mărimi se numesc *mărimi scalare* sau, mai simplu, *scalari*. Exemple reprezentative de mărimi scalare folosite în mecanică sunt masa, timpul, momentul unei forțe față de o axă, energia mecanică, momentele de inerție etc.

Multe alte mărimi fizice prezintă însă un caracter geometric, simpla precizare a valorii lor numerice nefiind suficientă pentru o caracterizare deplină a mărimii respective. Este cazul mărimilor vectoriale (sau al *vectorilor*). Nu putem concepe disciplina mecanică fără a discuta despre noțiunile de forță, moment al unei forțe față de un punct, viteză, accelerație, impuls, moment cinetic etc.

Vom considera că spațiul de lucru al Mecanicii clasice este spațiul euclidian tridimensional E_3 . Pentru a preciza poziția unui punct M în spațiul E_3 considerăm următoarele elemente :

- un punct fixat O al spațiului E_3 , numit *origine* ;
- distanța r de la punctul O la punctul M ;
- un sens de parcurgere al segmentului $[OM]$ și anume sensul de la O la M .

Distanța r , astfel determinată, poartă numele de *vector de poziție al punctului M* și se notează prin \vec{r} sau \vec{OM} . Valoarea absolută (sau *modulul*) vectorului \vec{r} se notează prin $|\vec{r}|$. Pentru a caracteriza mai bine vectorul \vec{r} ne folosim de trei drepte necoplanare, perpendiculare în O două câte două, notate prin Ox , Oy și Oz , pe care considerăm un sens de parcurs (sensul pozitiv). În partea pozitivă a axei Ox considerăm punctul A la distanța egală cu unitatea de O . Vom nota vectorul de poziție \vec{OA} al acestui punct prin \vec{i} și-l vom numi *versor*. Procedând la fel pentru axele Oy și Oz obținem versorii \vec{j} și \vec{k} (figura T 2.1). Notăm prin M_1, M_2 și M_3 proiecțiile punctului M pe axele Ox , Oy și Oz , respectiv, și cu x, y și z distanțele OM_1, OM_2 și OM_3 (considerate cu semnul “+” sau “-” după cum punctele M_1, M_2 și M_3 se găsesc în partea pozitivă sau negativă a axelor Ox, Oy și Oz).

Deoarece vectorul \vec{OM}_1 are modulul egal cu valoarea absolută a cantității x iar versorul \vec{i} are modulul 1 vom conveni să notăm $\vec{OM}_1 = x \vec{i}$ indicând prin aceasta că vectorul \vec{OM}_1 este determinat de scalarul x și versorul \vec{i} . Analog, $\vec{OM}_2 = y \vec{j}$ și $\vec{OM}_3 = z \vec{k}$.

Pentru vectorul de poziție \vec{r} al punctului M vom conveni să scriem

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

(2.1)

și vom spune că vectorul \vec{r} are componentele $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ iar punctul M coordonatele x, y, z față de axele triedrului Oxyz. Reprezentarea (2.1) poartă numele de *formă analitică* (sau *hipercomplexă*) a vectorului \vec{r} .

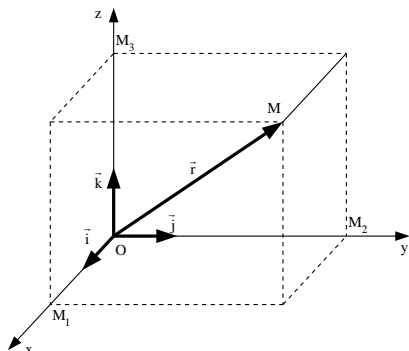


Figura T 2.1

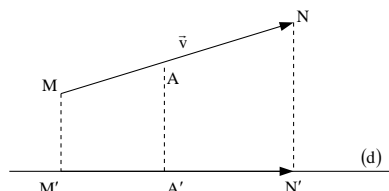


Figura T 2.2

De la vectorul de poziție al punctului arbitrar M se poate face acum pasul către noțiunea de vector în general. Astfel, considerând punctele M și N, vom defini vectorul $\vec{MN} = \vec{v}$ ca fiind segmentul orientat MN. Proiecțiile punctelor M și N pe axe vor determina trei vectori $v_x\vec{i}, v_y\vec{j}, v_z\vec{k}$ astfel că putem scrie

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (2.2)$$

Mărimile scalare v_x, v_y, v_z poartă numele de *coordoate ale vectorului* \vec{v} după axele reperului Oxyz (sau proiecții ale vectorului \vec{v}). Punctul M se numește *punct de aplicație al vectorului* \vec{v} iar punctul N este extremitatea vectorului \vec{v} . Dreapta MN reprezintă *suportul vectorului*. Dacă punctul de aplicație al vectorului \vec{v} este arbitrar, atunci vectorul se numește *liber*. În cazul în care punctul de aplicație este fixat vectorul se numește *legat*. În fine, dacă punctul de aplicație al vectorului \vec{v} poate fi ales oriunde pe dreapta suport, atunci vectorul se numește *alunecător*.

Vectorul la care punctul de aplicație coincide cu extremitatea poartă numele de *vector nul* și se notează prin $\vec{0}$. Dacă $\vec{v} = \vec{MN}$, atunci vectorul \vec{NM} , notat - \vec{v} , poartă numele de *vector opus vectorului* \vec{v} .

2.2. Proiecția unui vector pe un plan sau pe o dreaptă

Proiecția unui vector $\vec{v} = \vec{MN}$ pe o dreaptă (d) sau pe un plan (P) se obține prin proiecția extremităților sale pe aceea dreaptă sau pe acel plan. Se obține astfel câte un nou vector, al cărui sens va fi determinat prin sensul de deplasare a proiecției A' a punctului A de pe vectorul \vec{v} , când A se deplasează de la M la N (figura T 2.2).

Proiecția unui vector \vec{v} pe o axă (d), notată prin $pr_d \vec{v}$, este dată de relația

$$pr_d \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \cos \theta \quad (2.3)$$

în care θ reprezintă unghiul format de versorul vectorului \vec{v} și versorul axei (d). În particular, putem scrie că

$$v_x = pr_{Ox} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \alpha, \quad v_y = pr_{Oy} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \beta, \quad v_z = pr_{Oz} \vec{v} = |\vec{v}| \cos \gamma \quad (2.4)$$

unde α, β, γ sunt unghiurile formate de versorul vectorului \vec{v} cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai axelor de coordonate (figura T 2.3).

Deoarece $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, obținem că :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (2.5)$$

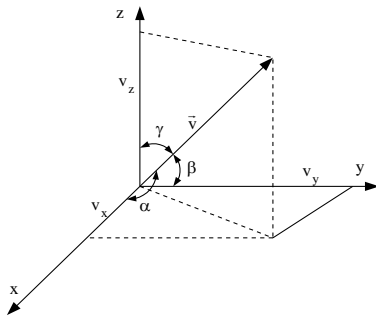


Figura T 2.3

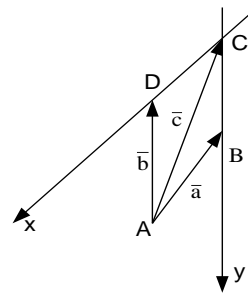


Figura T 2.4

Observația i) Dacă $\vec{v} = \vec{MN}$ și $M(x_M, y_M, z_M)$, $N(x_N, y_N, z_N)$, atunci

$$\vec{v} = (x_N - x_M) \vec{i} + (y_N - y_M) \vec{j} + (z_N - z_M) \vec{k} \quad (2.6)$$

2.3. Operații cu vectori liberi

2.3.1. Adunarea vectorilor liberi

Definiția 2.1: Fie $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ doi vectori liberi arbitrari. Vectorul \vec{c} dat prin relația

$$\vec{c} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \quad (2.6)$$

poartă numele de *vector sumă a vectorilor \vec{a} și \vec{b}* iar operația prin care \vec{c} se obține din \vec{a} și \vec{b} se numește *adunarea vectorilor*.

Operația de adunare este susceptibilă de a avea o reprezentare geometrică de o mare valoare practică. Vectorul \vec{c} este segmental dirijat \vec{AC} care coincide cu diagonala trecând prin A a paralelogramului construit pe vectori $\vec{a} = \vec{AB}$ și $\vec{b} = \vec{AD}$ ca laturi (figura T 2.4). Construcția astfel obținută se numește *regula paralelogramului*.

Observații: i) Vectorul sumă $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ poate fi obținut și în alt mod. Astfel, deplasând vectorii \vec{a} și \vec{b} paralel cu direcția lor astfel încât punctul de aplicație al vectorului \vec{b} să coincidă cu extremitatea vectorului \vec{a} vom găsi că vectorul sumă \vec{c} este vectorul ce leagă punctul de aplicație al vectorului \vec{a} de extremitatea vectorului \vec{b} . Regula de sumare astfel obținută se numește *regula triunghiului* (figura T 2.5).

ii) Regula triunghiului poate fi extinsă în cazul unui număr de n vectori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Vectorul sumă $\vec{c} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$ este vectorul care închide conturul poligonal format din vectorii puși cap la cap într-o ordine oarecare, începând cu punctul de aplicație al primului dintre ei și sfârșind cu extremitatea ultimului. Astfel, în figura T 2.6 este prezentată regula poligonului pentru cazul a trei vectori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Ordinea de sumare este indiferentă.

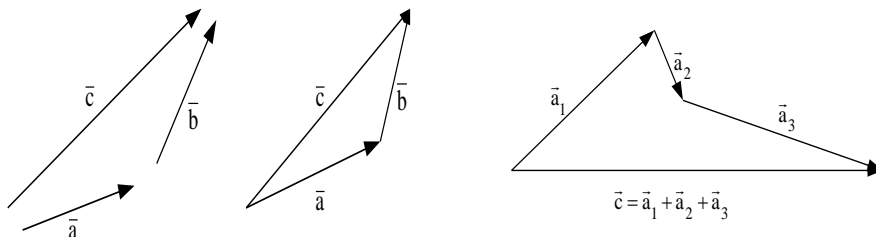


Figura T 2.5

Figura T 2.6

iii) Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăți:

- 1) Este *asociativă*, adică $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), (\forall) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
- 2) Este *comutativă*, adică $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, (\forall) \vec{a}, \vec{b}$;
- 3) Vectorul nul, $\vec{0}$, este *element neutru*: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, (\forall) \vec{a}$;
- 4) $(\forall) \vec{a}, (\exists) -\vec{a}$ (numit *opusul lui a*) astfel ca $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Găsim astfel că operația de adunare determină pe mulțimea vectorilor liberi V o structură de grup comutativ. Vom nota acest grup cu $(V, +)$. În acest grup ecuația $\vec{a} + x = \vec{b}$ are o unică soluție pe care o notăm prin $\vec{b} - \vec{a} = x$ și pe care o numim *diferența dintre vectorii \vec{a} și \vec{b}* (figura T 2.7).

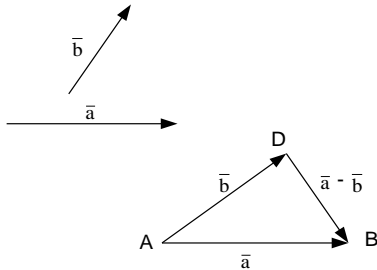


Figura T 2.7

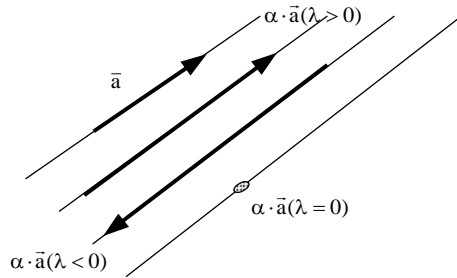


Figura T 2.8

2.3.2. Înmulțirea unui vector liber cu un scalar

Definiția 2.2 : Fie $\lambda \in R$ și $\vec{a} \in V$. Aplicația $"\cdot": R \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{a}) \rightarrow \lambda \cdot \vec{a}$ poartă numele de *înmulțire cu scalari*.

Observații : iv) Prin $\lambda \cdot \vec{a}$ înțelegem un vector liber construit astfel:

- 1) dacă $\lambda \neq 0$ și $\vec{a} \neq \vec{0}$, atunci $\lambda \cdot \vec{a}$ este un vector liber care are aceeași direcție cu vectorul \vec{a} , același sens cu \vec{a} dacă $\lambda > 0$ sau sens contrar lui \vec{a} dacă $\lambda < 0$ și lungimea egală cu $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ (figura T 2.8).
- 2) dacă $\lambda = 0$ sau $\vec{a} = \vec{0}$, atunci $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

v) Înmulțirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăți :

- 1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}, (\forall) \vec{a}$;
- 2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}, (\forall) \alpha, \beta \in R, (\forall) \vec{a} \in V$;
- 3) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}, (\forall) \alpha, \beta \in R, (\forall) \vec{a} \in V$;
- 4) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}, (\forall) \alpha \in R, \vec{a}, \vec{b} \in V$.

Definiția 2.3 : Fie vectorul liber \vec{a} . Vectorul \vec{u} , definit prin

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

(2.8)

poarta numele de *versor al vectorului* \vec{a} .

Observații : vi) Versorul \vec{u} are aceeași direcție și sens cu vectorul \vec{a} și modulul egal cu unitatea.

vii) Un mod foarte util de a proiecta un vector liber \vec{a} pe axele unui reper cartezian Oxyz , utilizat în capitolele următoare , este dat de următorul algoritm (vezi și figura T 2.9) :

- se consideră o direcție MN paralelă cu direcția vectorului \vec{a} astfel încât se cunosc coordonatele (x_M, y_M, z_M) și (x_N, y_N, z_N) ale punctelor M și N ;

$$\vec{u}_{MN} = \frac{1}{|\vec{MN}|} \cdot \vec{MN} = \frac{(x_N - x_M) \vec{i} + (y_N - y_M) \vec{j} + (z_N - z_M) \vec{k}}{\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}} ;$$

$$\text{- deoarece } \vec{u}_{MN} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{u}_{MN}, \text{ obținem că}$$

$$\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}} \cdot \left[(x_N - x_M) \vec{i} + (y_N - y_M) \vec{j} + (z_N - z_M) \vec{k} \right]$$

2.3.3. Produsul scalar (interior) a doi vectori liberi

Definiția 2.4: Fie vectorii \vec{a} și \vec{b} . Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de două drepte paralele cu direcțiile vectorilor \vec{a} și \vec{b} , duse prin același punct O, poartă numele de *unghi al vectorilor a și b* (figura T 2.10).

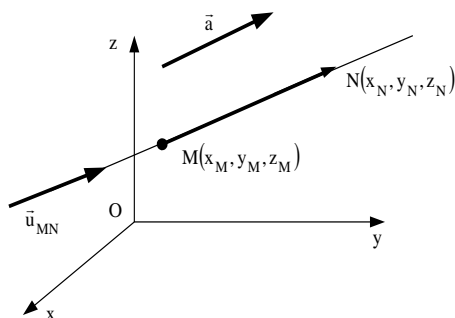


Figura T 2.9

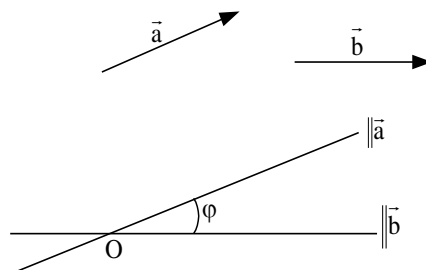


Figura T 2.10

Definiția 2.5 : Fie vectorii liberi $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Vom numi *produs scalar a celor doi vectori* mărimea scalară notată $\vec{a} \cdot \vec{b}$ și definită prin relația

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(2.9)

Observații : viii) Din definiția 2.5 rezultă următoarele proprietăți ale produsului scalar :

- 1) Comutativitatea : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, (\forall) \vec{a}, \vec{b} \in V$;
- 2) Distributivitatea față de adunare : $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, (\forall) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$.

ix) Plecând de la definiția (2.9) se poate deduce următoarea expresie geometrică a produsului scalar :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

(2.10)

Din formula (2.10) se obțin și alte proprietăți ale produsului scalar :

- 3) $\vec{a}, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;
- 4) $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} = 0, (\forall) \vec{a} \in V$;
- 5) Produsul scalar poate fi un scalar pozitiv, negativ sau nul după cum unghiul dintre cei doi vectori este mai mic, mai mare sau egal cu $\frac{\pi}{2}$;

$$6) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2, (\forall) \vec{a} \in V ;$$

7) Cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai axelor reperului cartezian Oxyz se pot forma următoarele produse scalare :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad , \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 .$$

2.3.4. Produsul vectorial (exterior) a doi vectori liberi

Definiția 2.6 : Fie vectorii liberi $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Vom numi *produs vectorial al vectorului \vec{a} prin vectorul \vec{b}* , și vom nota $\vec{a} \times \vec{b}$, ca fiind vectorul \vec{c} ale cărui proiecții pe axele reperului Oxyz sunt :

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, c_y = a_z b_x - a_x b_z, c_z = a_x b_y - a_y b_x \quad (2.11)$$

Observații : x) Punând vectorul \vec{c} sub forma

$$\vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

observăm că el este egal cu determinantul

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(2.12)

dezvoltat după elementele primei linii.

xi) Folosind definiția 2.6 deducem următoarea regulă de determinare a produsului vectorial dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} :

Produsul vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ este un vector de modul $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$,

perpendicular pe ambii factori și dirijat astfel încât triedrul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ să fie drept, adică

rotația vectorului \vec{a} în planul (\vec{a}, \vec{b}) cu un unghi cel mult egal cu π pentru a-l

suprapune peste \vec{b} să coincidă ca sens cu sensul vectorului \vec{c} (vezi figura T 2.11).

xii) Produsul vectorial are următoarele proprietăți :

1) *Anticomutativitate :* $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, (\forall) \vec{a}, \vec{b} \in V ;$

- 2) *Distributivitate față de adunare* : $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, (\forall) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;
- 3) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}), (\forall) \lambda \in R, (\forall) \vec{a}, \vec{b} \in V$;
- 4) $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}, (\forall) \vec{a} \in V$;
- 5) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow (\exists) \lambda \in R$ astfel încât $\vec{a} = \lambda \vec{b}$;
- 6) Dacă $\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$, atunci $\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe vectorii \vec{a} și \vec{b} (vezi figura T 2.11).

2.3.5. Dublul produs vectorial a trei vectori liberi

Definiția 2.7 : Fie vectorii liberi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Vectorul $\vec{w} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ se numește *dublul produs vectorial al celor trei vectori*.

Observații : xiii) Folosind proprietățile produsului scalar și ale produsului vectorial se poate demonstra relația :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(2.13)

xiv) Vectorul \vec{w} din definiția 2.7 este un vector coplanar cu vectorii \vec{b} și \vec{c} .

2.3.6. Produsul mixt a trei vectori liberi

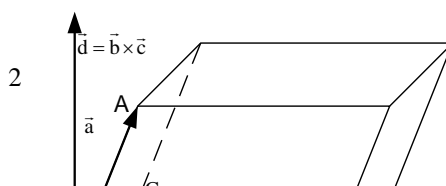
Definiția 2.8 : Fiind dați vectorii liberi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, mărimea scalară $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ poartă numele de *produs mixt al celor trei vectori*.

Observații : xiv) Folosind (2.12) și definiția produsului scalar obținem că :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(2.14)

xv) Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt vectori necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului ce se poate construi pe cei trei vectori considerați cu punctul de aplicație comun (figura T 2.12).



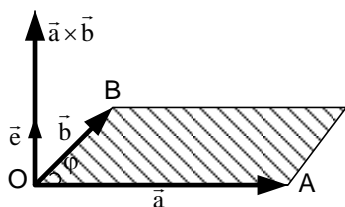


Figura T 2.11

Figura T 2.12

xvi) Produsul mixt are următoarele proprietăți :

- 1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}), (\forall) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V;$
- 2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}), (\forall) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V;$
- 3) $\lambda \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \lambda \vec{c}), (\forall) \lambda \in R, (\forall) \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V;$
- 4) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}_1 \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a}_2 \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), (\forall) \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \in V;$
- 5) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$ i) $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$ sau $\vec{c} = \vec{0};$
 ii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari ;
 iii) $(\exists) \lambda \in R$ astfel încât $\vec{b} = \lambda \vec{c}.$

xvii) O notație folosită pentru produsul mixt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ este $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$

3. Reducerea sistemelor de forțe

3.1. Forțe și sisteme de forțe

Prin **forță** se înțelege o mărime fizică vectorială ce măsoară interacțiunea mecanică dintre corpurile materiale și care caracterizează transmiterea mișcării de la un corp către un altul. Fiind o mărime vectorială forța are toate atributele unui vector: punct de aplicație, direcție, sens și modul.

Cele mai întâlnite forțe în natură sunt greutatea corpurilor, forța atracției universale, forțele de frecare, forțele elastice, forțele electromagnetice etc.

Forțele ce se exercită asupra unui sistem material se împart în:

- *forțe exterioare* – dacă sunt exercitate de corpurile din afara sistemului studiat asupra corpurilor din sistem;

- *forțe interioare* – dacă sunt exercitate între părțile componente ale aceluiași sistem material.

La rândul lor, forțele exterioare se împart în forțe direct aplicate (de exemplu forța de greutate) și forțe de legătură (datorate restricțiilor de natură geometrică impuse corpurilor)

Totalitatea forțelor ce acționează asupra unui corp material se numește *sistem de forțe*. Două sisteme de forțe se numesc *echivalente* dacă sub acțiunea fiecăruia dintre ele corpul are aceeași stare mecanică.

Orice forță care acționează asupra unui solid rigid are caracterul unui vector alunecător, adică prin alunecarea pe suportul ei efectul forței asupra rigidului rămâne același.

Pentru a caracteriza mai bine efectul unei forțe asupra unui rigid este necesar să se introducă și noțiunile de moment al unei forțe în raport cu un punct și de moment al unei forțe în raport cu o axă.

3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct (pol)

3.2.1. Definiție

Definiția 3.1: Prin definiție, *momentul unei forțe* \vec{F} în raport cu un punct O este dat de produsul vectorial dintre vectorul de poziție \vec{r} al punctului de aplicație A al forței și vectorul \vec{F} , adică

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.1)$$

Momentul $\vec{M}_O(\vec{F})$ este un vector legat, aplicat în punctul O (figura T 3.1). El este

perpendicular pe planul determinat de \vec{r} și \vec{F} , are sensul dat de regula burghiului drept și modulul:

$$\left| \vec{M}_O(\vec{F}) \right| = \left| \vec{r} \times \vec{F} \right| = \left| \vec{r} \right| \cdot \left| \vec{F} \right| \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) = \left| \vec{r} \right| \cdot \left| \vec{F} \right| \sin \alpha = \left| \vec{F} \right| \cdot d \quad (3.2)$$

unde distanța d (de la punctul O la suportul forței \vec{F}) se numește *brațul forței*.

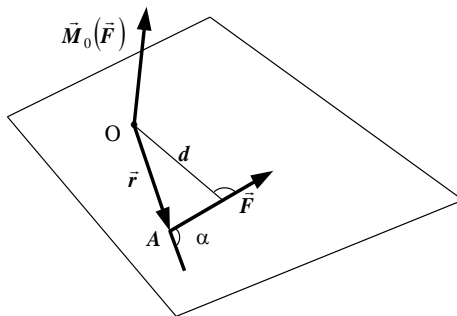


Figura T 3.1

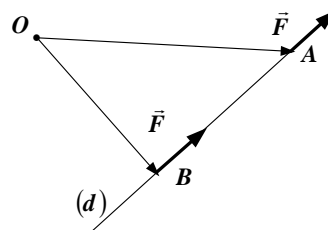


Figura T 3.2

Notând cu F_x, F_y, F_z proiecțiile forței \vec{F} pe axele reperului cartezian $Oxyz$ și cu x, y, z coordonatele punctului A de aplicație al forței, se obține următoarea expresie analitică a momentului $\vec{M}_O(\vec{F})$:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

(3.3)

3.2.2. Proprietăți ale momentului unei forțe în raport cu un punct

P1) Momentul unei forțe în raport cu un punct **este nul** dacă și numai dacă suportul forței trece prin acel punct (deoarece brațul forței este nul).

P2) Momentul unei forțe în raport cu un punct **nu se modifică** dacă forța își deplasează punctul de aplicație în lungul suportului ei.

Demonstrație (vezi figura T 3.2): Fie A și B două puncte pe suportul (d) al forței \vec{F} .

Dacă forța este aplicată în A, atunci $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$. Pentru forța aplicată în B avem că

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OB} \times \vec{F} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F},$$

deoarece $\vec{AB} \parallel \vec{F}$.

P3) Momentul unei forțe în raport cu un punct (pol) **se modifică** odată cu modificarea polului.

Demonstrație (vezi figura T 3.3): Se consideră punctele O și O'. În conformitate cu definiția 3.1 putem scrie că $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$ și

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}) = \vec{O'A} \times \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{OA}) \times \vec{F} = \vec{O'O} \times \vec{F} + \vec{OA} \times \vec{F}.$$

Rezultă că:

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

(3.4)

Momentul forței \vec{F} în raport cu polul O' rămâne neschimbat doar dacă $\vec{O'O} \parallel (d)$.

3.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă

Definiția 3.2 : Prin definiție, *momentul unei forțe \vec{F} în raport cu o axă (Δ)* este dat de proiecția pe axă a momentului forței \vec{F} în raport cu un punct O oarecare al axei, adică:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = pr_{\Delta} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = (\vec{r}, \vec{F}, \vec{u}_{\Delta}) \quad (3.5)$$

unde prin \vec{u}_{Δ} s-a notat versorul axei (Δ) .

Observații: i) Definiția dată momentului unei forțe față de o axă are sens deoarece considerând un punct O' , diferit de O, situat pe axa (Δ) vom obține aceiași valoare pentru scalarul $M_{\Delta}(\vec{F})$ (vezi figura T 3.4). Într-adevăr:

$$M'_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{r}', \vec{F}, \vec{u}) = (\vec{O'O} + \vec{r}, \vec{F}, \vec{u}) = (\vec{O'O}, \vec{F}, \vec{u}) + (\vec{r}, \vec{F}, \vec{u}) = M_{\Delta}(\vec{F}),$$

deoarece $\vec{O'O} \parallel \vec{u}$.

ii) Dacă considerăm că axa (Δ) coincide cu axa Ox a reperului Oxyz și că forța \vec{F} se aplică în A(x, y, z), atunci

$$M_{Ox}(\vec{F}) = (\vec{r}, \vec{F}, \vec{i}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y F_z - z F_y$$

(3.6)

Analog, $M_{Oy}(\vec{F}) = z F_x - x F_z$, $M_{Oz}(\vec{F}) = x F_y - y F_x$, ceea ce înseamnă că componentele momentului unei forțe față de un punct O pe axele unui triedru triortogonal cu originea în O reprezintă de fapt momentele aceleiași forțe față de axele triedrului.

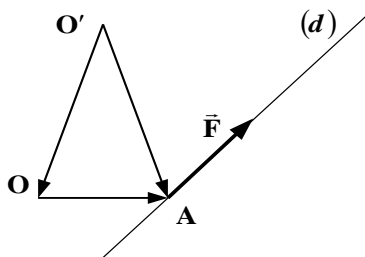


Figura T 3.3.

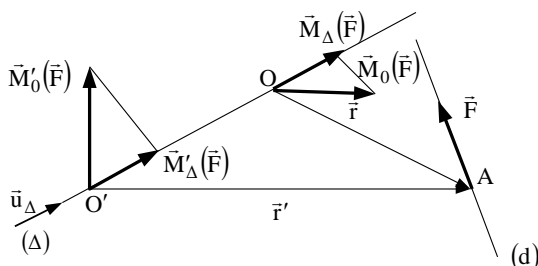


Figura T 3.4

3.4. Torsorul unei forțe în raport cu un punct

3.4.1. Operații elementare de echivalență

Se consideră un solid rigid acționat de un sistem de forțe arbitrar. Se pune problema înlocuirii sistemului de forțe cu un sistem echivalent mai simplu, adică cu un sistem care să producă în orice punct al rigidului același efect mecanic ca și sistemul de forțe inițial.

Pentru obținerea unor sisteme de forțe echivalente, dar mai simple, se aplică forțelor care alcătuiesc sistemul o serie de operații astfel încât aplicarea oricărei dintre ele să conducă la obținerea unui sistem echivalent. Aceste operații, numite *operații elementare de echivalență*, sunt:

- O1) Forța care acționează asupra rigidului poate fi deplasată în lungul suportului ei.
- O2) În sistemul de forțe dat se pot suprima sau introduce două forțe egale și direct opuse.
- O3) Mai multe forțe pot fi înlocuite prin rezultanta lor (obținută pe baza regulii paralelogramului).

3.4.2. Cuplu de forțe

Definiția 3.3: Prin *cuplu de forțe* se înțelege un sistem de două forțe paralele, egale în modul, și care acționează pe suporturi diferite.

Observația iii) : Un cuplu de forțe aplicat unui rigid tinde să-l rotească în jurul unei axe perpendiculare pe planul definit de suporturile celor două forțe (figura T 3.5).

Definiția 3.4: Prin *momentul unui cuplu de forțe* se înțelege suma momentelor forțelor care alcătuiesc cuplul în raport cu același punct.

Vom demonstra două proprietăți utile în cele ce urmează.

P1) Proiecția unui cuplu de forțe pe orice axă este nulă.

Demonstrație: Fie o axă (Δ) de versor \vec{u} . Avem că:

$$pr_{\Delta}(\vec{F}, -\vec{F}) = pr_{\Delta}(\vec{F}) + pr_{\Delta}(-\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{u} + (-\vec{F}) \cdot \vec{u} = 0.$$

P2) Momentul unui cuplu nu depinde de punctul în raport cu care se calculează (deci este un vector liber).

Demonstrație: Fie O un punct arbitrar (vezi figura T 3.5).

$$\vec{M}_O = \vec{OB} \times \vec{F} + \vec{OA} \times (-\vec{F}) = (\vec{OB} - \vec{OA}) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} \text{ (independent de } O).$$

În concluzie, momentul \vec{M}_O al cuplului este perpendicular pe planul definit de suporturile forțelor, sensul este stabilit cu regula burghiului drept iar modulul său este

$|\vec{M}_O| = |\vec{F}| \cdot d$, unde d reprezintă distanța între suporturile forțelor (numită *brațul cuplului*).

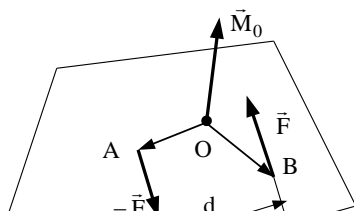


Figura T 3.5

3.4.3. Torsorul unei forțe în raport cu un punct: deducere și interpretare mecanică

Fie un rigid (C) acționat în punctul A de forța \vec{F} . Ne propunem să studiem efectul forței \vec{F} în punctul O. Pentru aceasta se introduc în O forțele \vec{F} și $-\vec{F}$ (pe baza operației de echivalență nr. 2). Forța \vec{F} din A și forța $-\vec{F}$ din O formează un cuplu caracterizat de momentul său $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$, perpendicular pe planul determinat de punctul O și direcția forței \vec{F} (vezi figura T 3.6).

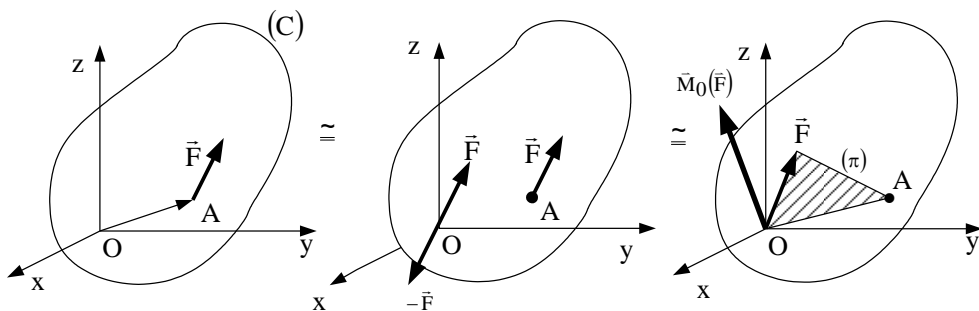


Figura T 3.6

Deci, în punctul O va acționa forța \vec{F} (egală cu cea care acționa în A) și momentul $\vec{M}_O(\vec{F})$. Ansamblul format din cei doi vectori formează ceea ce se numește *torsorul de reducere al forței \vec{F} , aplicată în A, în punctul O*. El se notează simbolic prin

$$\tau_O(\vec{F}) = \left(\vec{F}, \vec{M}_O \right) \text{ sau } \tau_O \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} \end{array} \right.$$

Torsorul de reducere reprezintă efectul mecanic exercitat de forța \vec{F} (care acționează în A) asupra punctului O.

3.5. Torsorul unui sistem de forțe în raport cu un punct

3.5.1. Deducere

Vom considera un solid rigid acționat în punctele $A_i, i = \overline{1, n}$ de forțele $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$. Ne propunem să determinăm efectul mecanic produs într-un punct O de acțiunea simultană a celor n forțe, adică torsorul τ_O al sistemului (figura T 3.7).

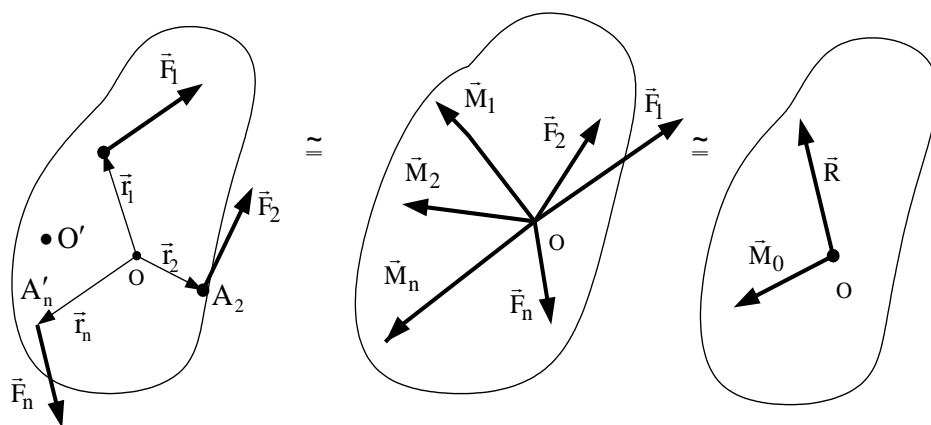


Figura T 3.7

Pentru aceasta se reduc pe rând toate forțele sistemului (vezi secțiunea 3.4.3.) și se obțin în punctul O vectorii concurenți $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, respectiv $\vec{M}_i = \vec{OA}_i \times \vec{F}_i, i = \overline{1, n}$. Pe baza operației nr. 3 de echivalență, forțele $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, pot fi înlocuite prin rezultanta lor \vec{R} iar momentele $\vec{M}_i, i = \overline{1, n}$, pot fi înlocuite cu momentul resultant \vec{M}_O , obținându-se astfel torsorul de reducere în punctul O al sistemului de forțe $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$:

$$(3.7) \quad \tau_O \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \end{array} \right.$$

În concluzie, orice sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid poate fi înlocuit cu o singură forță și un singur vector moment aplicat într-un punct O convenabil ales.

Observația iv) Dacă asupra rigidului acționează și p cupluri de forțe de momente $\vec{M}_j, j = \overline{1, p}$, atunci torsorul de reducere are componentele:

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \sum_{j=1}^p \vec{M}_j \end{cases}$$

(3.8)

3.5.2. Proprietăți

P1) Dacă se schimbă polul de reducere din O în O' , atunci se modifică a doua componentă a tursorului după cum urmează:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^n \vec{O'A_i} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{O'O} + \vec{OA_i} \right) \times \vec{F}_i = \vec{O'O} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} \times \vec{F}_i = \\ &= \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}, \end{aligned}$$

astfel încât:

$$\tau_{O'} \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \end{cases}$$

(3.9)

Forța rezultantă este un *invariant al operației de reducere într-un punct al unui sistem de forțe* (adică nu depinde de punctul de reducere).

P2) Produsul scalar dintre vectorii forță rezultantă \vec{R} și moment rezultant \vec{M}_O este un invariant al operației de reducere într-un punct al unui sistem de forțe.

Demonstrație: Înmulțind scalar relația $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}$ prin \vec{R} și observând că $(\vec{O'O} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0$, obținem că:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{constant}$$

(3.10)

Produsul $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ se numește *trinom invariant* și este un al doilea invariant al operației de reducere. Pentru a justifica această denumire se consideră vectorii \vec{R} și \vec{M}_O proiectați pe axele reperului cartezian $Oxyz$ ($\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$, $\vec{M}_O = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k}$) și se utilizează relația (2.9). Se obține:

$$R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz} = \text{constant} \quad (3.11)$$

P3) Proiecția momentului rezultat pe direcția forței rezultante este un invariant al operației de reducere.

Demonstrație: Fie \vec{u}_R versorul direcției forței rezultante \vec{R} și M_R proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei (figura T 3.8). Atunci:

$$M_R = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_R = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R} = \text{constant}.$$

Observația v) M_R nu este un invariant independent de rezultanta \vec{R} și trinomial invariant $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$, el rezultând ca raport al celor doi. Pentru operația de reducere a unui sistem de forțe într-un punct avem doi invarianți și anume \vec{R} și $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ sau \vec{R} și M_R .

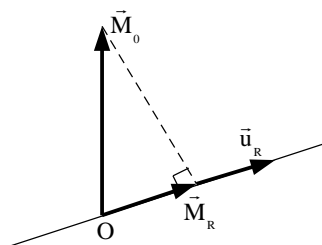


Figura T 3.8

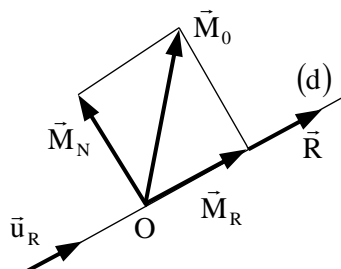


Figura T 3.9

3.6. Torsor minimal. Axă centrală.

3.6.1. Torsor minimal

Dacă facem reducerea unui sistem de forțe $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$ în diferite puncte ale spațiului se constată că torsorul de reducere este diferit datorită modificării momentului rezultat (figura T 3.9). Acesta se descompune în două componente:

\vec{M}_R - pe direcția rezultantei \vec{R} ;

\vec{M}_N - pe direcția aflată la intersecția planului normal în O pe \vec{R} cu planul determinat de vectorii \vec{R} și \vec{M}_O .

Putem scrie:

$$(3.12) \quad \vec{M}_O = \vec{M}_R + \vec{M}_N, \quad M_O = \sqrt{M_R^2 + M_N^2}$$

Deoarece \vec{M}_R este un invariant al operației de reducere rezultă că modificările momentului rezultat se datoresc componentei \vec{M}_N care, în funcție de punctul de reducere, poate ocupa orice poziție și orice valoare în planul normal pe direcția rezultantei. Valoarea minimă a momentului rezultat se va obține atunci când $\vec{M}_N = \vec{0}$:

$$\vec{M}_{\min} = \vec{M}_R \quad (3.13)$$

)

Torsorul de reducere alcătuit din rezultanta \vec{R} și momentul minim se numește torsor minimal (figura T 3.10):

$$(3.14) \quad \tau_{\min} : \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_{\min} = \vec{M}_R = M_R \cdot \vec{u}_R = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R^2} \cdot \vec{R} \end{cases}$$

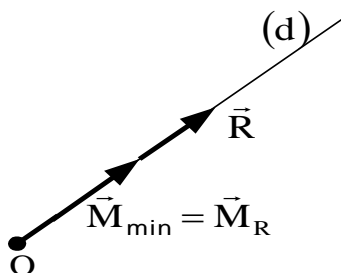


Figura T 3.10

3.6.2. Axa centrală

Definiția 3.5 : Locul geometric al punctelor din spațiu în care făcând reducerea se obține torsorul minimal se numește *axă centrală*.

Fie P(x, y, z) un punct oarecare al axei centrale în raport cu un reper cartezian Oxyz. Atunci:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{PO} \times \vec{R} = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ M_{Ox} & M_{Oy} & M_{Oz} \end{vmatrix}$$

Rezultă proiecțiile:

$$\begin{aligned} M_{Px} &= M_{Ox} - (yR_z - zR_y) \quad , \quad M_{Py} = M_{Oy} - (zR_x - xR_z) \quad , \\ M_{Pz} &= M_{Oz} - (xR_y - yR_x) \end{aligned}$$

(3.15)

Observând că într-un punct al axei centrale componentele torsorului de reducere sunt vectori coliniari $\left(\vec{M}_P = \vec{M}_{\min} // \vec{R} \right)$ și folosind condiția de coliniaritate a doi vectori, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{M_{Px}}{R_x} &= \frac{M_{Py}}{R_y} = \frac{M_{Pz}}{R_z} \Leftrightarrow \\ \frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} &= \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} \end{aligned}$$

(3.16)

reprezentând ecuația unei drepte în spațiu dată ca intersecție de două plane.

Observații: vi) Dacă $\vec{R} = \vec{0}$, atunci noțiunea de axă centrală își pierde sensul.

vii) Axa centrală mai poate fi definită și ca locul geometric al punctelor în care rezultanta \vec{R} și vectorul moment resultant \vec{M}_O sunt coliniari (dacă $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$).

3.7. Cazuri de reducere ale unui sistem de forțe oarecare

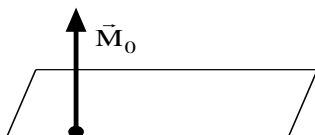
Reducerea unui sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid revine la înlocuirea acestuia cu cel mai simplu sistem de forțe care are același torsor cu al sistemului dat. Cum momentul resultant apare ca un cuplu de forțe aplicat unui rigid, se poate enunța următoarea **teoremă fundamentală a reducerii**:

Un sistem de forțe aplicate unui rigid este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta sistemului, aplicată într-un punct arbitrar O și un cuplu de forțe al cărui moment este momentul resultant al sistemului în raport cu punctul O.

Funcție de valorile modulelor celor doi vectori se disting următoarele cazuri:

I) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$: Un sistem de forțe care are torsorul nul se numește *echivalent cu zero*. Forțele acestui sistem își fac echilibrul și, în consecință, un rigid acționat de un astfel de sistem de forțe se află în echilibru.

II) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$: Un sistem de forțe care are torsorul de reducere alcătuit doar din momentul \vec{M}_O este echivalent cu *orice cuplu care acționează într-un plan (P)*



perpendicular pe \vec{M}_O și al cărui moment să coincidă cu \vec{M}_O ca sens și mărime, adică $|\vec{M}_O| = |\vec{F}| \cdot d$, unde d este brațul cuplului (figura T 3.11).

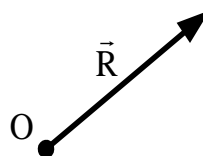


Figura T 3.11

Figura T 3.12

III) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$: Torsorul de reducere constă doar din rezultanta \vec{R} . Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică egală cu \vec{R} și aplicată în O (figura T 3.12)

IV) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$

a) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ (adică $\vec{R} \perp \vec{M}_O$): Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, egală cu \vec{R} , și care acționează chiar pe axa centrală a sistemului (figura T 3.13) deoarece în punctele ei momentul are valoarea minimă, care în acest caz este nulă $\left(M_{\min} = M_R = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R} = 0 \right)$.

b) $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$ (adică $\vec{R} \not\perp \vec{M}_O$): Pentru a obține un sistem echivalent, dar mai simplu, se descompune vectorul \vec{M}_O în două componente și anume componenta \vec{M}_R pe direcția rezultantei și componenta \vec{M}_N din planul (P) normal pe direcția rezultantei (figura T 3.14). Vectorii \vec{M}_N și \vec{R} , perpendiculari între ei (cazul IV a), pot fi înlocuiți cu forța \vec{R} dirijată pe axa centrală astfel încât sistemul de forțe este echivalent cu torsorul minimal, adică din forța \vec{R} aplicată pe axa centrală și un cuplu alcătuit din forțele \vec{F} și $-\vec{F}$ din planul (P), brațul cuplului fiind $d = \frac{|\vec{M}_R|}{|\vec{R}|}$ iar sensul forțelor ales astfel încât

momentul cuplului să fie egal cu \vec{M}_R .

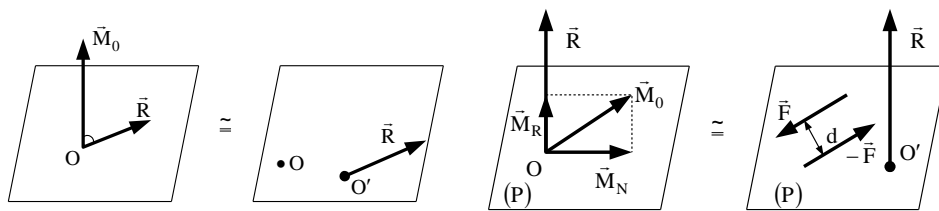


Figura T 3.13

Figura T 3.14

3.8. Reducerea sistemelor particulare de forțe

3.8.1. Reducerea forțelor concurente

Definiția 3.6 : O mulțime de n forțe, $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, ale căror suporturi trec prin același punct O , formează *un sistem de forțe concurente*.

Toate forțele pot aluneca pe suporturile lor astfel încât punctele de aplicație să ajungă în O . Momentele acestor forțe față de punctul O sunt nule iar forțele pot fi înlocuite cu rezultanta lor. În concluzie, *un sistem de forțe concurente este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta* $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, al cărui suport trece prin punctul O sau este echivalent cu zero dacă $\vec{R} = \vec{0}$.

3.8.2. Reducerea forțelor coplanare

Definiția 3.7 : O mulțime de n forțe, $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, ale căror suporturi sunt toate conținute într-un același plan (P) formează *un sistem de forțe coplanare* (figura T 3.15).

Notând cu $Oxyz$ planul forțelor și observând că :

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j}, \quad \vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j}, i = \overline{1, n} \quad (3.17)$$

găsim pentru elementele torsorului în O expresiile analitice:

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \cdot \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \cdot \vec{j} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \cdot \vec{k} = M_{Oz} \vec{k} \end{cases} \quad (3.18)$$

Deoarece $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ rezultă că sistemul de forțe coplanare nu poate fi niciodată echivalent cu torsorul minimal. Cazurile de reducere pentru sistemul de forțe coplanare rezultă din cazurile de reducere a forțelor oarecare și sunt următoarele:

- I) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$: Sistemul de forțe este echivalent cu zero.
- II) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$: Sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu de moment \vec{M}_O .
- III) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$: Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta \vec{R} , aplicată în O.
- IV) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$: Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, egală cu \vec{R} , aplicată într-un punct al axei centrale.

Ecuatiile axei centrale rezultă prin particularizarea ecuațiilor din cazul general ($R_z = M_{O_x} = M_{O_y} = z = 0$). Se obține:

$$\begin{cases} x R_y - y R_x = M_{O_z} \\ z = 0 \end{cases}$$

(3.19)

adică dreapta de ecuație $x R_y - y R_x = M_{O_z}$ din planul forțelor.

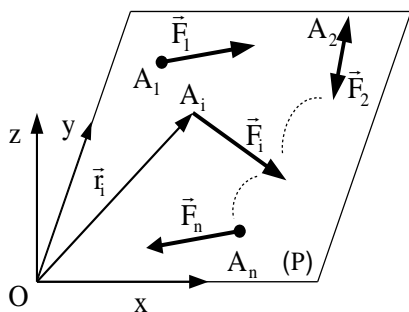


Figura T 3.15

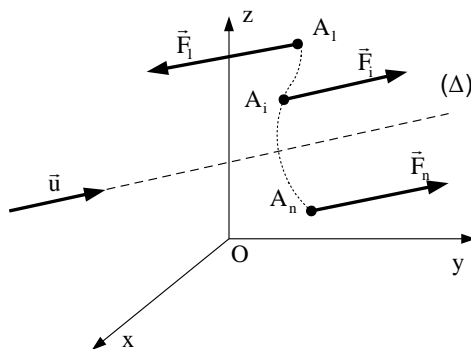


Figura T 3.16

3.8.3. Reducerea forțelor paralele

Definiția 3.8 : O mulțime de n forțe, $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, ale căror suporturi sunt drepte paralele între ele formează *un sistem de forțe paralele*.

Fie \vec{u} versorul direcției comune pentru forțele paralele $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, (figura T 3.16). Putem scrie că $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}, i = \overline{1, n}$, unde $F_i > 0$ dacă sensul forței \vec{F}_i coincide cu sensul versorului \vec{u} și $F_i < 0$ în caz contrar.

Elementele torsorului de reducere în O sunt :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \vec{u} // \vec{u} \quad (3.20)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times F_i \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} \perp \vec{u} \quad (3.21)$$

În consecință, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ iar cazurile de reducere ale unui sistem de forțe paralele sunt aceleași cu cele din cazul forțelor coplanare. Pentru determinarea axei centrale vom folosi relația (3.21) și observația că într-un punct al axei centrale momentul rezultat este nul. Pentru un punct arbitrar P al axei centrale putem scrie:

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{R} &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} - \vec{r} \times \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \left[\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \vec{r} \right] \times \vec{u} &= \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \vec{r} = \mu \vec{u} \Leftrightarrow \\ \vec{r} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \frac{\mu}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

(3.22)

Notând :

$$\lambda = -\frac{\mu}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad \vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.22)$$

obținem următoarea ecuație numită **ecuația vectorială a axei centrale** :

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \lambda \cdot \vec{u} \quad (3.23)$$

Ecuația (3.23) reprezintă ecuația unei drepte ce trece prin punctul fix C (numit

centrul forțelor paralele) și care este paralelă cu axa (Δ) de versor \vec{u} (vezi figura T 3.17).

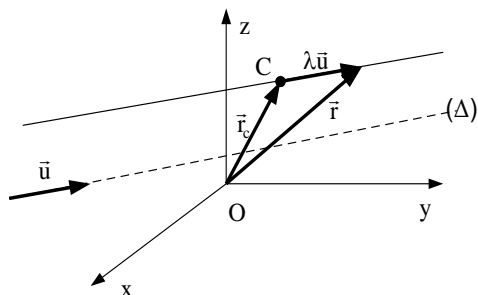


Figura T 3.17

Într-un sistem cartezian Oxyz coordonatele centrului forțelor paralele sunt :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

(3.24)

Centrul forțelor paralele are următoarele proprietăți (fără demonstrație):

P1) Se poate schimba direcția tuturor forțelor cu același unghi și în același sens și axa centrală va trece tot prin punctul C ;

P2) Se poate multiplica mărimea tuturor forțelor cu același scalar și centrul forțelor paralele rămâne nemodificat;

P3) Poziția centrului forțelor paralele nu depinde de alegerea sistemului de referință (este o proprietate intrinsecă a sistemului de forțe).

3.9. Probleme rezolvate

R 3.1) Asupra unei bare cotite ABCD acționează forța \vec{F} , de modul 100 N. Să se determine momentul forței \vec{F} față de punctele A și B (figura R 3.1). Dimensiunile sunt date în cm.

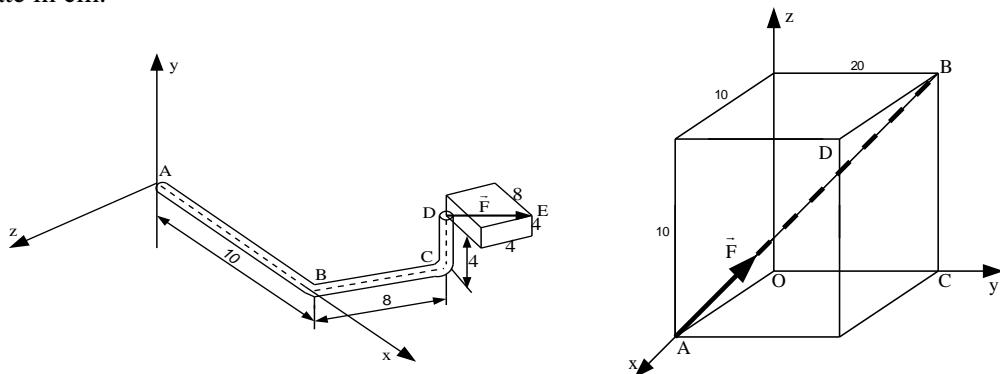


Figura R 3.1

Figura R 3.2

Rezolvare: Ca un prim pas să determinăm expresia analitică a forței \vec{F} :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{DE} = F \cdot \frac{\vec{DE}}{DE} = 100 \cdot \frac{8\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 4^2}} = 81,6\vec{i} + 40,8\vec{j} - 40,8\vec{k} \quad (\text{N})$$

Conform definiției 3.1 avem că:

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 4 & -8 \\ 81,6 & 40,8 & -40,8 \end{vmatrix} = 163,2\vec{i} - 244,8\vec{j} + 81,6\vec{k} \quad (\text{N} \cdot \text{cm})$$

În plus,

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{BA} \times \vec{F}$$

sau

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -8 \\ 81,6 & 40,8 & -40,8 \end{vmatrix} = 163,2\vec{i} - 652,8\vec{j} - 325,6\vec{k} \quad (\text{N} \cdot \text{cm})$$

R 3.2) Pe diagonala AC a paralelipipedului dreptunghic din figura R 3.2 acționează forța \vec{F} , de modul 1000 N. Aflați momentul acestei forțe față de dreapta orientată DC. Dimensiunile sunt date în cm.

Rezolvare: Folosind definiția 3.2 obținem că:

$$M_{DC}(\vec{F}) = pr_{DC} \vec{M}_C(\vec{F}) = (\vec{CA} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}_{DC} = (\vec{CA}, \vec{F}, \vec{u}_{DC}) \quad (*)$$

Dar A(10, 0, 0), B(0, 20, 10), C(0, 20, 0) și D(10, 20, 10), astfel încât:

$$\begin{aligned} \vec{CA} &= 10\vec{i} - 20\vec{j}, \vec{F} = 1000 \cdot \frac{-10\vec{i} + 20\vec{j} + 10\vec{k}}{\sqrt{100 + 400 + 100}} = \frac{1000}{\sqrt{6}}(-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}), \\ \vec{u}_{DC} &= \frac{-10\vec{i} - 10\vec{k}}{\sqrt{100 + 100}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}) \end{aligned}$$

Din (*) găsim acum că:

$$M_{DC}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} 10 & -20 & 0 \\ 1000 & 2000 & 1000 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{10000}{\sqrt{3}} \text{ (N} \cdot \text{cm)}.$$

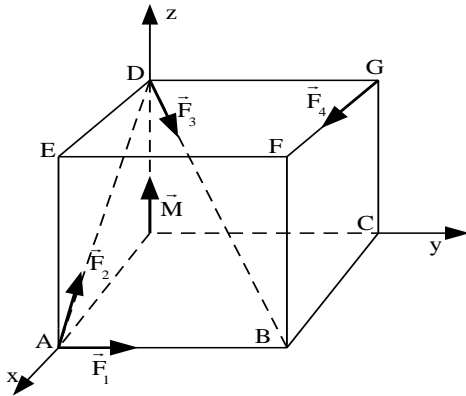


Figura R 3.3.1.

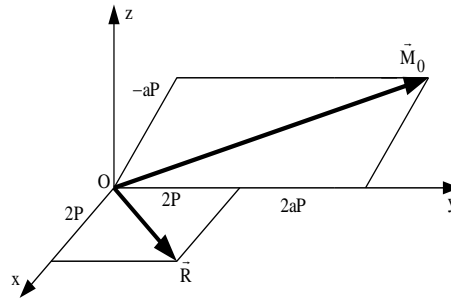


Figura R 3.3.2.

R 3.3) Asupra cubului OABCDEFG de latură a din figura R 3.3.1. acționează un sistem de patru forțe, având punctele de aplicație, direcțiile și sensurile din figură și modulele $F_1 = P, F_2 = P\sqrt{2}, F_3 = P\sqrt{3}, F_4 = 2P$ și un cuplu de moment $M = a \cdot P$ pe direcția OD.

Se cere:

- Să se calculeze și să se reprezinte torsorul de reducere în punctul O;
- Cu ce este echivalent sistemul de forțe ?
- Să se calculeze, dacă este cazul, momentul minim;
- Să se determine ecuațiile axei centrale;
- Să se determine torsorul de reducere în punctul E.

Rezolvare: a) Elementele torsorului de reducere în punctul O sunt:

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^4 \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \vec{M} \end{cases}$$

Se vor proiecta pe rând forțele $\vec{F}_i, i = \overline{1,4}$, pe axele sistemului Oxyz și se vor determina apoi momentele acestor forțe în raport cu punctul O. Rezultatele vor fi trecute în tabelul T 3.1.

Forța \vec{F}_1 : Fiind dirijată pe o paralelă la axa Oy se proiectează numai pe această axă.

Deci: $F_{1x} = F_{1z} = 0, F_{1y} = P$. Momentul forței \vec{F}_1 în raport cu punctul O este dat de relația:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{OA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \end{vmatrix} = aP \vec{k}$$

deoarece A(a, 0, 0).

Forta \vec{F}_2 : $\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{u}_{AD} = F_2 \cdot \frac{\vec{AD}}{AD} = P\sqrt{2} \cdot \frac{-a\vec{i} + a\vec{k}}{\sqrt{a^2 + a^2}} = -P\vec{i} + P\vec{k}$, deoarece

D(0,0,a). În plus, $\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{OA} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -P & 0 & P \end{vmatrix} = -aP\vec{j}$.

Forta \vec{F}_3 : $\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{DB} = F_3 \cdot \frac{\vec{DB}}{DB} = P\sqrt{3} \cdot \frac{a\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{k}}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = P\vec{i} + P\vec{j} - P\vec{k}$ și

$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \vec{OD} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a \\ P & P & -P \end{vmatrix} = -aP\vec{i} + aP\vec{j}$.

Forta \vec{F}_4 : Fiind paralelă cu axa Ox se proiectează în adevărată mărime pe această axă,

adică $\vec{F}_4 = 2P\vec{i}$. În plus, $\vec{M}_O(\vec{F}_4) = \vec{OG} \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & a \\ 2P & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2aP\vec{j} - 2aP\vec{k}$.

Momentul \vec{M} : $\vec{M} = aP\vec{k}$.

Forța	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
\vec{F}_1	0	P	0	0	0	aP
\vec{F}_2	-P	0	P	0	-aP	0
\vec{F}_3	P	P	-P	-aP	aP	0
\vec{F}_4	2P	0	0	0	2aP	-2aP
\vec{M}	-	-	-	0	0	aP
Σ	2P	2P	0	-aP	2aP	0

Tabelul T 3.1

Din tabelul T 3.1 deducem că:

$$\tau_O : \begin{cases} \vec{R} = 2P \vec{i} + 2P \vec{j} \\ \vec{M}_O = -aP \vec{i} + 2aP \vec{j} \end{cases}$$

și $|\vec{R}| = 2P\sqrt{2}, |\vec{M}_O| = aP\sqrt{5}$. Elementele tursorului de reducere sunt reprezentate în figura R 3.3.2.

b) Deoarece $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$ și $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 2P \cdot (-aP) + 2P \cdot 2aP = 2aP^2 \neq 0$, sistemul de forțe este echivalent cu un tursor minimal.

$$c) \vec{M}_{\min} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{aP}{2} (\vec{i} + \vec{j}).$$

d) Ecuațiile generale ale axei centrale (3.11) se rescriu pentru această problemă sub forma:

$$\frac{-aP - y \cdot 0 + z \cdot 2P}{2P} = \frac{2aP - z \cdot 2P + x \cdot 0}{2P} = \frac{0 - x \cdot 2P + y \cdot 2P}{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0, 4z - 3a = 0.$$

Observație: Axa centrală a fost obținută ca intersecție a planelor de ecuație $x = y$ și $z = \frac{3a}{4}$.

e) Tursorul în punctul $E(a, 0, a)$ este format din vectorul forță rezultantă $\vec{R} = 2P \vec{i} + 2P \vec{j}$ și vectorul moment resultant:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + \vec{EO} \times \vec{R} = -aP \vec{i} + 2aP \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & -a \\ 2P & 2P & 0 \end{vmatrix} = aP \vec{i} - 2aP \vec{k}.$$

R 3.4) Placa hexagonală OABCDE de latură a din figura R 3.4.1 este solicitată de patru forțe $\vec{F}_i, i = \overline{1, 4}$, situate în planul său și un cuplu de forțe de moment \vec{M} (perpendicular pe planul plăcii). Dacă $F_1 = F_3 = P, F_2 = P\sqrt{3}, F_4 = 2P, M = \frac{\sqrt{3}}{2} aP, CF = \lambda a$ ($\lambda \in R$), se cere:

- Tursorul de reducere în O (discuție în funcție de valorile parametrului λ);
- Ecuația axei centrale;
- Reprezentarea grafică a tursorului în O și a axei centrale.

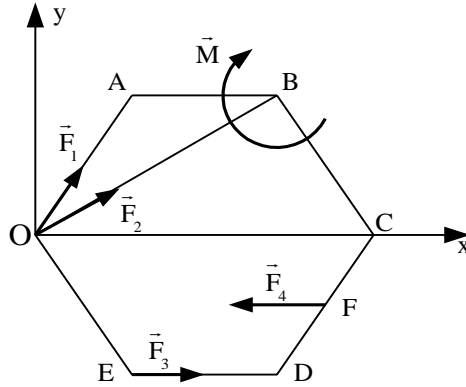


Figura R 3.4.1

Rezolvare: a) Fiind un sistem de forțe coplanare (situat în planul Oxy), forțele vor avea proiecții doar pe axele Ox și Oy iar momentele acestor forțe în raport cu punctul O vor fi perpendiculare pe planul Oxy , deci $F_{iz} = M_{ix} = M_{iy} = 0, i = \overline{1,4}$. Modulele momentelor vor fi calculate cu relația (3.2) iar sensul cu regula burghiului drept.

Forța \vec{F}_1 : $F_{1x} = F_1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} P$, $F_{1y} = F_1 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P$,
 $\left| \vec{M}_O(\vec{F}_1) \right| = 0$ (O aparține suportului forței \vec{F}_1).

Forța \vec{F}_2 : $F_{2x} = F_2 \cos 30^\circ = \frac{1}{2} P$, $F_{2y} = F_2 \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P$,
 $\left| \vec{M}_O(\vec{F}_2) \right| = 0$ (O aparține suportului forței \vec{F}_2).

Forța \vec{F}_3 : $F_{3x} = F_3 = P$, $F_{3y} = 0$,
 $\left| \vec{M}_O(\vec{F}_3) \right| = \left| \vec{F}_3 \right| \cdot d(O, ED) = F_3 \cdot OE \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a P$ (având sensul axei Oz , proiecția este pozitivă).

Forța \vec{F}_4 : $F_{4x} = 0$, $F_{4y} = -F_4 = -2P$,
 $\left| \vec{M}_O(\vec{F}_4) \right| = \left| \vec{F}_4 \right| \cdot d(O, \vec{F}_4) = \left| \vec{F}_4 \right| \cdot CF \sin 60^\circ = \sqrt{3} \lambda a P$ (deoarece are sensul opus celui pozitiv pe Oz , această proiecție este negativă).

Momentul \vec{M} : $M = -\left| \vec{M} \right| = -\frac{\sqrt{3}}{2} a P$.

Rezultatele au fost sintetizate în tabelul T 3.4.

Forțe	F_x	F_y	M_z
\vec{F}_1	$\frac{1}{2}P$	$\frac{\sqrt{3}}{2}P$	0
\vec{F}_2	$\frac{3}{2}P$	$\frac{\sqrt{3}}{2}P$	0
\vec{F}_3	P	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}aP$
\vec{F}_4	-2P	0	$-\sqrt{3}\lambda aP$
\vec{M}	-	-	$-\frac{\sqrt{3}}{2}aP$
Σ	P	$\sqrt{3}P$	$-\sqrt{3}\lambda aP$

Tabelul T 3.4

Se obține torsorul:

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = P \vec{i} + \sqrt{3} P \vec{j} \\ \vec{M}_O = -\sqrt{3} \lambda a P \vec{k} \end{cases}$$

b) Ecuația (3.14) a axei centrale are în cazul nostru forma :

$$\sqrt{3}x - y = -\sqrt{3}\lambda a.$$

c) Reprezentarea în funcție de valorile parametrului real λ a torsorului de reducere și a axei centrale este dată în figura R 3.4.2.

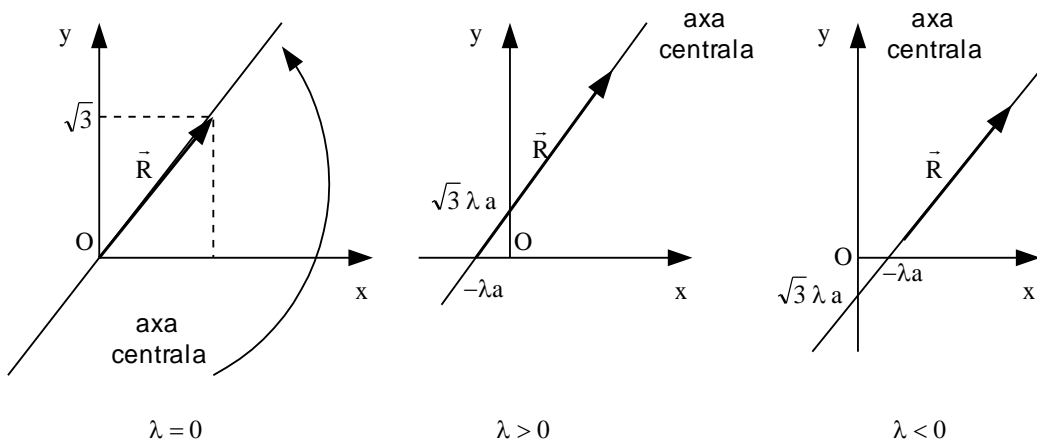


Figura R 3.4.2

R 3.5) Se dau forțele paralele $\vec{F}_i, i = \overline{1,4}$, având direcțiile și sensurile din figura R 3.5 , modulele $F_1 = 4P, F_2 = 8P, F_3 = 5P, F_4 = 6P$ și punctele de aplicație $A_1(3a, 0, 5a), A_2\left(\frac{3a}{2}, 2a, 0\right), A_3(0, 4a, 0), A_4\left(\frac{3a}{2}, 0, \frac{5a}{2}\right)$, respectiv. Se cere :

- a) Să se determine tursorul de reducere în punctul O ;
- b) Să se determine centrul forțelor paralele ;
- c) Să se determine ecuația vectorială a axei centrale.

Rezolvare: a) Forțele se proiectează în adevărată mărime pe Oz și dau momente doar pe axele Ox și Oy. Proiecțiile acestor vectori sunt date în tabelul T 3.5.

Forțe	F_z	M_x	M_y
\vec{F}_1	- 4 P	0	12 a P
\vec{F}_2	8 P	16 a P	- 12 a P
\vec{F}_3	- 5 P	- 20 a P	0
\vec{F}_4	6 P	0	- 9 a P
\sum	5 P	- 4 a P	- 9 a P

Tabelul T 3.5

$$\tau_o : \vec{R} = 5P \vec{k} \quad , \quad \vec{M}_O = -4aP \vec{i} - 9aP \vec{j}$$

b) Coordonatele centrului forțelor paralele sunt:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^4 F_i x_i}{\sum_{i=1}^4 F_i} = \frac{9}{5}a, \eta = \frac{\sum_{i=1}^4 F_i y_i}{\sum_{i=1}^4 F_i} = -\frac{4}{5}a, \zeta = \frac{\sum_{i=1}^4 F_i z_i}{\sum_{i=1}^4 F_i} = -a$$

Rezultă $C\left(\frac{9}{5}a, -\frac{4}{5}a, -a\right)$.

c) Ecuația vectorială a axei centrale este :

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \lambda \vec{k} = \frac{9}{5}a \vec{i} - \frac{4}{5}a \vec{j} + (\lambda - a) \vec{k}$$

unde λ este o constantă arbitrară. Axa centrală este o dreaptă paralelă cu Oz și care conține punctul C .

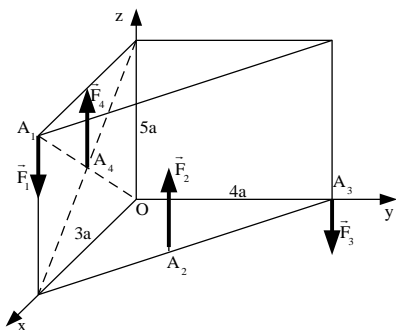


Figura R 3.5

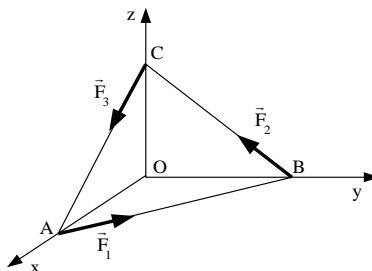


Figura TC 3.1

3.10. Probleme propuse

3.10.1. Teste clasice

TC 3.1) Asupra piramidei triunghiulare OABC din figura TC 3.1, având laturile $AB = AC = a$ și $\angle OAB = 30^\circ$, acționează forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 și \vec{F}_3 orientate ca în figură și având modulele $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F, |\vec{F}_3| = F\sqrt{\frac{3}{2}}$. Se cere:

- Să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O și să se reprezinte grafic elementele torsorului de reducere obținut;
- Cu ce este echivalent sistemul celor trei forțe?

TC 3.2) Se consideră paralelipipedul dreptunghic OABCO'A'B'C' de laturi $OA = 3a$, $OC = 4a$, $OO' = 12a$ solicitat ca în figura TC 3.2, unde $F_1 = 10P, F_2 = 26P, F_3 = 21P$ și $M = 6aP$. Pe latura O'A' acționează o sarcină liniar distribuită (paralela cu Oz), ce variază de la valoarea 0 în punctul O' la valoarea $q = \frac{2P}{a}$ în punctul A'. Se cere:

- Torsorul de reducere în O;
- Cu ce este echivalent sistemul dat?
- Ce forță și ce moment trebuie să se introducă în O pentru ca noul sistem de forțe să se reducă la o rezultantă unică iar axa centrală să treacă prin A și B?

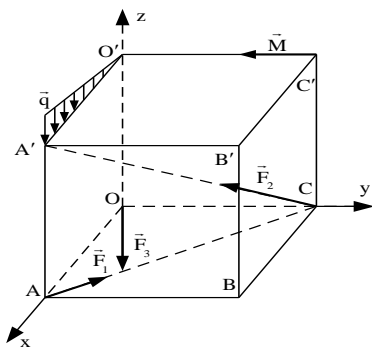


Figura TC 3.2

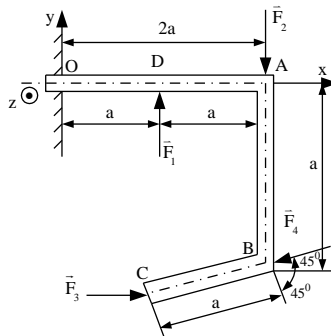


Figura TC 3.3

TC 3.3) O bară încastrată, având dimensiunile din figura TC 3.3, este solicitată de sistemul de forțe coplanare $\vec{F}_i, i = \overline{1,4}$, având direcțiile și sensurile din figură și modulele $F_1 = P, F_2 = 2P, F_3 = 3P, F_4 = P\sqrt{2}$. Se cere :

- Torsorul de reducere în punctul O ;
- Cu ce este echivalent sistemul de forțe ?
- Ecuția axei centrale .

TC 3.4) Se dau forțele paralele $\vec{F}_1 = P \vec{i}, \vec{F}_2 = -5P \vec{i}, \vec{F}_3 = 10P \vec{i}, \vec{F}_4 = -2P \vec{i}$, care acționează în punctele $A_1(a, 2a, 0), A_2(-a, a, 2a), A_3(2a, a, 4a), A_4(0, 0, -a)$, respectiv. Se cere:

- Să se calculeze și să se reprezinte torsorul de reducere în punctul O;
- Să se determine centrul forțelor paralele și să se determine axa centrală.

3.10.2. Teste grilă

TG 3.1) Un sistem de forțe oarecare se reduce la o forță unică, egală cu rezultanta \vec{R} , și care acționează pe axa centrală a sistemului dacă elementele torsorului de reducere $\tau_o(\vec{R}, \vec{M}_o)$ în raport cu punctul arbitrar O verifică condițiile:

- $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_o = \vec{0}$; b) $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_o \neq \vec{0}, \vec{R} \cdot \vec{M}_o = 0$; c) $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_o \neq \vec{0}, \vec{R} \cdot \vec{M}_o \neq 0$;
- $\vec{R} // \vec{M}_o$.

TG 3.2) Punctul de aplicație al forței $\vec{F} = 10 \vec{i} + 3 \vec{j}$ (N) are vectorul de poziție $\vec{r} = 5 \vec{j} + 10 \vec{k}$ (m) în raport cu originea sistemului cartezian Oxyz. Care este momentul forței \vec{F} în raport cu diagonala AD a paralelipipedului dreptunghic din figura TG 3.2.

- $-\frac{84}{\sqrt{17}}$; b) 0 ; c) $\frac{92}{\sqrt{17}}$; d) $\frac{101}{\sqrt{17}}$.

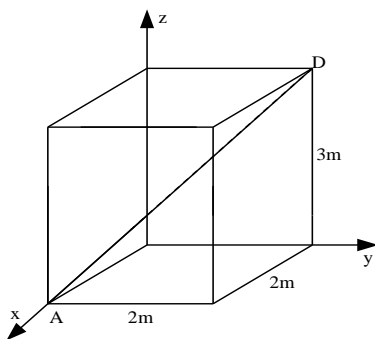


Figura TG 3.2

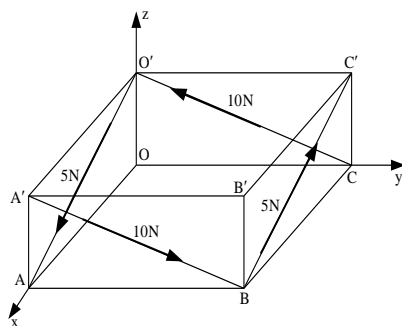


Figura TG 3.3

TG 3.3) Suma momentelor cuplurilor de forțe ce acționează în lungul diagonalelor paralelipipedului dreptunghic din figura TG 3.3 este:

a) $\vec{M} = 35,35 \vec{i} + 22,36 \vec{j} + 80,07 \vec{k}$; b) $\vec{M} = \vec{0}$;

c) $\vec{M} = 50,14 \vec{i} + 91,07 \vec{j} - 14,65 \vec{k}$; d) $\vec{M} = -23,14 \vec{i} + 47,92 \vec{k}$.

3.11. Indicații și răspunsuri

TC 3.1) a) $\tau_0 \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \frac{\sqrt{3}}{4} a F (\vec{i} + 3 \vec{j} + \vec{k}) \end{cases}$

b) Sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu de forțe de moment \vec{M}_O .

TC 3.2) a) Sarcina liniar distribuită este echivalentă cu forța rezultantă $\vec{F} = -3P \vec{k}$, aplicată în centrul D (2 a , 0 , 12 a) al forțelor paralele distribuite .

Forțe	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
\vec{F}_1	- 6 P	8 P	0	0	0	24 a P
\vec{F}_2	6 P	- 8 P	24 P	96 a P	0	- 24 a P
\vec{F}_3	0	0	- 21 P	0	0	0
\vec{F}	0	0	- 3 P	0	6 a P	0
\vec{M}	-	-	-	0	- 6 a P	0
\sum	0	0	0	96 a P	0	0

$$\tau_O : \vec{R} = \vec{0} , \vec{M}_O = 96aP \vec{i}$$

b) Sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu de forțe de moment $\vec{M}_O = 96aP \vec{i}$.

c) Fie $\vec{F}' = F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k}$ si $\vec{M}' = M'_x \vec{i} + M'_y \vec{j} + M'_z \vec{k}$ forța și momentul necesar a fi introduse în punctul O . Noul torsesor de reducere în O este :

$$\tau'_O : \vec{R}' = F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k} , \vec{M}'_O = (96aP + M'_x) \vec{i} + M'_y \vec{j} + M'_z \vec{k}$$

Deoarece rezultanta este paralelă cu axa centrală (dreapta AB) se impun condițiile $F'_x = F'_z = 0$. Ecuațiile axei centrale sunt :

$$\frac{96aP + M'_x + zF'_y}{0} = \frac{M'_y}{F'_y} = \frac{M'_z - xF'_y}{0}$$

sau

$$x = \frac{M'_z}{F'_y}, \quad z = -\frac{M'_x + 96aP}{F'_y}$$

În plus, $\vec{R}' \cdot \vec{M}'_O = F'_y \cdot M'_y$. Ecuațiile axei centrale sunt : $x = 3a$, $z = 0$.

Rezultă:

$$M'_z = 3aF'_y, \quad M'_x = -96aP$$

Sistemul se reduce la o forță unică dacă $\vec{R}' \cdot \vec{M}'_O = 0$, adică $M'_y = 0$ (dacă $F'_y = 0$, noțiunea de axă centrală își pierde sensul). Deci

$$\vec{F}' = F'_y \vec{j}, \quad \vec{M}' = -96aP \vec{i} + 3aF'_y \vec{k}$$

unde F'_y este o constantă arbitrară.

TC 3.3) a)

Forțe	F_x	F_y	F_z
\vec{F}_1	0	P	aP
\vec{F}_2	0	-2P	-4aP
\vec{F}_3	3P	0	$\frac{3}{2}(2 + \sqrt{2})aP$
\vec{F}_4	-P	-P	-3aP
Σ	2P	-2P	$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)aP$

$$\tau_O : \vec{R} = 2P \vec{i} - 2P \vec{j}, \quad \vec{M}_O = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)aP$$

b) $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$

Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, egală cu rezultanta, situată pe axa centrală.

c) $x + y = \frac{3}{4}(2 - \sqrt{2})a$.

TC 3.4) a) Vezi problema R 3.5.

$$\tau_O : \vec{R} = 4P \vec{i}, \quad \vec{M}_O = 10aP \vec{j} - 7aP \vec{k};$$

b) Centrul forțelor paralele este punctul $C\left(\frac{13}{2}a, \frac{7}{4}a, 8a\right)$.

TG 3.1) Vezi “Cazuri de reducere a unui sistem de forțe oarecare”. Răspuns corect: **b**).

TG 3.2) Se folosește faptul că $M_{AD}\left(\vec{F}\right) = \vec{M}_A\left(\vec{F}\right) \cdot \vec{u}_{AD}$, unde $\vec{M}_A\left(\vec{F}\right) = \vec{M}_O\left(\vec{F}\right) + \vec{AO} \times \vec{F}$ și $A(2, 0, 0)$, $D(0, 2, 3)$. Răspuns corect: **c**).

TG 3.3) $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, unde \vec{M}_1 este un vector liber, perpendicular pe planul $ABC'O'$, de sens trigonometric și modul $M_1 = 5\text{ N} \cdot 10\text{ m} = 50\text{ N} \cdot \text{m}$ iar \vec{M}_2 este un vector liber, perpendicular pe planul $BCO'A'$, de sens trigonometric și modul $M_2 = 10\text{ N} \cdot 5\text{ m} = 50\text{ N} \cdot \text{m}$. Răspuns corect: **a**).

4. Centre de masă

4.1. Greutatea corpurilor

Un corp de masă m aflat la suprafața Pământului este supus atracției acestuia. Asupra sa acționează o forță $\vec{G} = m\vec{g}$, numită *greutate*, unde \vec{g} este accelerația gravitațională terestră. Valoarea accelerației gravitaționale variază cu latitudinea și altitudinea dar aceste variații sunt mici și în calcule se poate considera valoarea medie $g = 9,81\text{ m/s}^2$. În ceea ce privește direcția sa, vectorul \vec{g} este aproximativ dirijat către centrul Pământului, existând o mică deviație datorată mișcării de rotație a Pământului.

Dacă într-o problemă concretă de mecanică corpurile ce intervin se află răspândite pe o regiune ale cărei dimensiuni sunt neglijabile în raport cu cele ale Pământului, atunci câmpul de vectori \vec{g} poate fi considerat constant și, prin urmare, greutatea diferitelor puncte materiale pot fi considerate ca forțe paralele și se pot folosi rezultatele obținute la reducerea sistemelor de forțe paralele.

4.2. Centrul de masă (greutate) al unui sistem de puncte materiale

Se consideră sistemul de puncte materiale $A_i, i = \overline{1, n}$, de greutate $\vec{G}_i, i = \overline{1, n}$, și vectorii de poziție $\vec{r}_i, i = \overline{1, n}$ (figura T 4.1). Un astfel de sistem de forțe este echivalent

cu o forță unică, egală cu $\vec{G} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{g}$ (unde M este masa sistemului), și numită *greutatea sistemului*. Ea acționează într-un punct al axei centrale, care este o dreaptă paralelă cu direcția forțelor și care trece prin centrul forțelor paralele de greutate definit prin:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad (4.1)$$

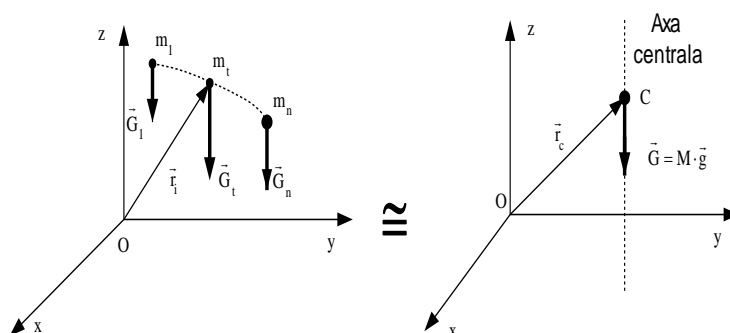


Figura T 4.1

Punctul C se numește în acest caz *centru de greutate al sistemului de puncte materiale*. Înlocuind $G_i = m_i \cdot g$, $i = \overline{1, n}$, în (4.1) și simplificând prin g obținem:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.2)$$

Proiectând relația (4.2) pe axele sistemului cartezian Oxyz obținem coordonatele punctului C:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

(4.3)

Expresiile (4.2) și (4.3) nu depind de g ci numai de distribuția maselor $m_i, i = \overline{1, n}$. Se poate introduce astfel noțiunea de *centru de masă al unui sistem de puncte materiale*, punctul C fiind deci centrul de masă al sistemului de mase $m_i, i = \overline{1, n}$.

Noțiunea de centru de masă este mai generală decât cea de centru de greutate, care are sens doar pentru mase aflate în câmp gravitațional (nu neapărat terestru). Astfel, este impropriu să vorbim despre centrul de greutate al sistemului planetar dar se poate vorbi despre centrul de masă al acestuia (care se află foarte aproape de centrul de masă al Soarelui). Centrul de masă și centrul de greutate coincid însă în cazul unui sistem de puncte materiale aflat în câmp gravitațional uniform.

4.3. Centru de masă al unui solid rigid

În cazul unui solid rigid (figura T 4.2) formulele (4.2) și (4.3) se modifică în sensul că sumele se transformă în integrale:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_{(D)} \vec{r} dm}{\int_{(D)} dm}$$

(4.4)

$$x_C = \frac{\int_{(D)} x dm}{\int_{(D)} dm}, \quad y_C = \frac{\int_{(D)} y dm}{\int_{(D)} dm}, \quad z_C = \frac{\int_{(D)} z dm}{\int_{(D)} dm}$$

(4.5)

unde (D) este domeniul ocupat de solidul rigid.

Pentru studiul centrului de masă al solidului rigid este necesar să se introducă o nouă mărime și anume *densitatea*. Din punct de vedere al densității, corpurile se împart în *corpuri omogene* (de densitate constantă) și *corpuri neomogene* (de densitate variabilă).

Se pot defini următoarele categorii de densități:

- pentru corpuri cu masa repartizată spațial pe un volum V (toate cele trei dimensiuni au același ordin de mărime), *densitatea volumetrică*:

$$\rho_v = \frac{dm}{dV} \quad \left(\text{sau } \rho_v = \frac{M}{V} \right)$$

(4.6)

- pentru corpuri cu masa repartizată pe o suprafață de arie A (una din dimensiuni este neglijabilă în raport cu celelalte două), *densitatea superficială*:

$$\rho_s = \frac{dm}{dA} \quad \left(\text{sau } \rho_s = \frac{M}{A} \right) \quad (4.7)$$

- pentru corpuri cu masa repartizată pe o curbă de lungime L (două dintre dimensiuni sunt neglijabile în raport cu cea de-a treia), *densitatea liniară*:

$$\rho_L = \frac{dm}{dL} \quad \left(\text{sau } \rho_L = \frac{M}{L} \right) \quad (4.8)$$

Definițiile din paranteză corespund corpurilor omogene.

Înlocuind în relația (3.4) elementul de masă dm , respectiv, cu:

$$dm = \rho_V dV \quad , \quad dm = \rho_s dA \quad , \quad dm = \rho_L dL \quad (4.9)$$

$$\int_{(D)} dV = V \quad , \quad \int_{(D)} dA = A \quad , \quad \int_{(D)} dL = L \quad (4.10)$$

se obțin, după simplificarea densităților, relațiile:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_{(D)} \vec{r} dV}{V} \quad , \quad \vec{r}_C = \frac{\int_{(D)} \vec{r} dA}{A} \quad , \quad \vec{r}_C = \frac{\int_{(D)} \vec{r} dL}{L} \quad (4.11)$$

valabile pentru corpuri omogene cu masa distribuită spațial, superficial sau liniar. În cazul corpurilor neomogene se aplică relațiile (4.11) din (4.9).

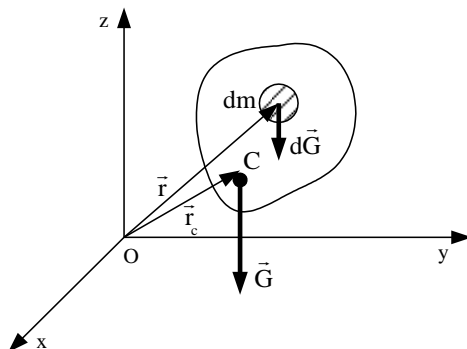


Figura T 4.2

4.4. Proprietăți ale centrului de masă

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale sau al unui solid rigid are următoarele proprietăți (fără demonstrație):

P1) Poziția centrului de masă nu depinde de sistemul de referință ales, fiind un punct intrinsec al sistemului material.

P2) Dacă corpul (sistemul de puncte materiale) are un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul maselor se află în acel plan, pe acea axă sau în acel punct.

P3) Dacă un sistem (S) de puncte materiale se compune din n subsisteme $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$, ale căror mase $M_i, i = \overline{1, n}$, și centre de masă $C_i, i = \overline{1, n}$, se cunosc atunci centrul de masă al sistemului (S) se poate obține considerând că masele sistemelor componente s-ar concentra în centrele de masă (figura T 4.3), adică:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \cdot \vec{r}_{C_i}}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

(4.12)

unde \vec{r}_{C_i} reprezintă vectorii de poziție ai punctelor $C_i, i = \overline{1, n}$.

P4) Dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca provenind dintr-un sistem de puncte materiale (S_1) din care s-a scos un alt sistem (S_2) și dacă se cunosc masele M_1 și M_2 și centrele de masă C_1 și C_2 ale acestora (figura T 4.4), atunci centrul de masă al sistemului (S) se poate obține considerând că în C_1 și C_2 se află concentrate masele M_1 și $-M_2$:

$$\vec{r}_C = \frac{M_1 \vec{r}_{C_1} - M_2 \vec{r}_{C_2}}{M_1 - M_2}$$

(4.13)

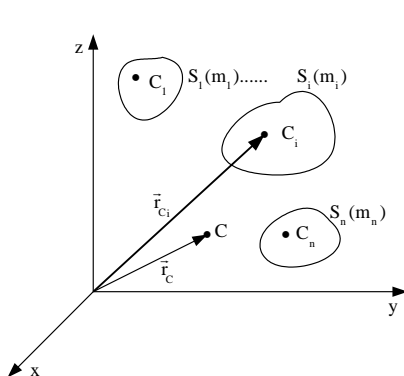


Figura T 4.3

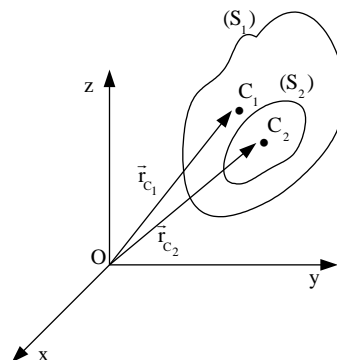


Figura T 4.4

4.5. Momente statice. Teorema momentelor statice

În relațiile (4.3) care dau coordonatele centrului de masă al unui sistem de puncte materiale intervin sumele $\sum_{i=1}^n m_i x_i$, $\sum_{i=1}^n m_i y_i$, $\sum_{i=1}^n m_i z_i$ dintre masele punctelor și distanțele lor la planele de coordonate. Aceste sume se numesc *momente statice în raport cu planele de coordonate* și se notează după cum urmează:

$$S_{Oxy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad S_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad S_{Ozx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (4.14)$$

În plus, suma $\vec{S}_O = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$ care intervine în relația (4.2) se numește *moment static polar*.

Momentele statice caracterizează modul de distribuire a masei unui sistem de puncte materiale. Din (4.2) și (4.3) se obține că:

$$\vec{S}_O = M \cdot \vec{r}_C, \quad S_{Oxy} = M \cdot z_C, \quad S_{Oyz} = M \cdot x_C, \quad S_{Ozx} = M \cdot y_C \quad (4.15)$$

adică:

- i) Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu punctul O este egal cu masa sistemului înmulțită cu vectorul de poziție al centrului de masă în raport cu punctul O;
- ii) Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa sistemului și distanța de la centrul său de masă la acel plan.

Enunțurile i) și ii) reprezintă **teorema momentelor statice**.

Observații: 1) Cele prezentate mai sus rămân valabile și pentru un solid rigid (cu observația că sumele se transformă în integrale);

$$2) C \in Oyz \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0 \quad (4.16)$$

Relații similare au loc dacă $C \in Ozx$ și $C \in Oyx$.

4.6. Probleme rezolvate

R 4.1) Se consideră sistemul plan de puncte materiale din figura R 4.1, de mase $m_i = i \cdot m, i = 1, 4$, situate în puncte ale cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 7a^2$ și hiperbolei de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$. Să se determine coordonatele centrului de masă ale acestui sistem.

Rezolvare: Coordonatele punctelor în care se găsesc punctele materiale se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile cercului și hiperbolei. Se obține:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7a^2 \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow A_1(-2a, \sqrt{3}a), A_2(-2a, -\sqrt{3}a), A_3(2a, \sqrt{3}a), A_4(2a, -\sqrt{3}a)$$

Rezultatele se sintetizează în tabelul T 4.1.

Punct	m_i	x_i	y_i	$m_i x_i$	$m_i y_i$
1	M	-2 a	$\sqrt{3} a$	-2 m a	$\sqrt{3} m a$
2	2 m	-2 a	$-\sqrt{3} a$	-4 m a	$-2\sqrt{3} m a$
3	3 m	2 a	$\sqrt{3} a$	6 m a	$3\sqrt{3} m a$
4	4 m	2 a	$-\sqrt{3} a$	8 m a	$-4\sqrt{3} m a$
Σ	10 m			8 m a	$-2\sqrt{3} m a$

Tabelul T 4.1

Găsim astfel că:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{4}{5} a, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i y_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = -\frac{\sqrt{3}}{5} a \Rightarrow C\left(\frac{4}{5}a, -\frac{\sqrt{3}}{5}a\right).$$

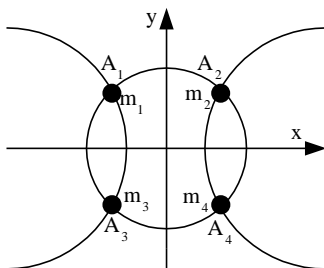


Figura R 4.1

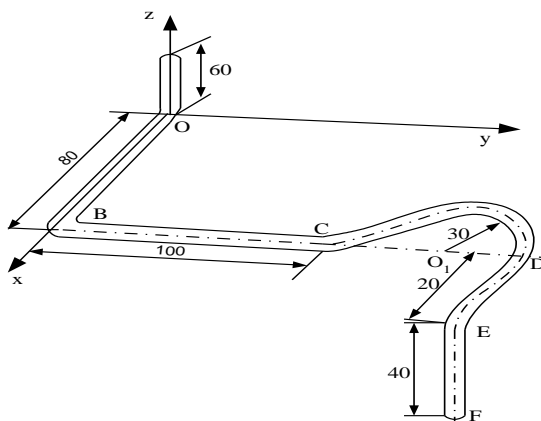


Figura R 4.2

R 4.2) Se consideră bara omogenă având dimensiunile din figura R 4.2, date în cm. Să se determine coordonatele centrului de masă.

Rezolvare: Bara omogenă poate fi considerată ca fiind construită din :

- segmentul de dreaptă OA, de lungime 60 cm, aflat pe axa Oz ;
- segmentul de dreaptă OB, de lungime 80 cm, aflat pe axa Ox ;
- segmentul de dreaptă BC, de lungime 100 cm, aflat în planul Oxy (BC // Oy) ;
- semicercul CD, de rază 30 cm, aflat în planul Oxy (CD // Oy) ;
- segmentul de dreaptă DE, de lungime 20 cm, aflat în planul Oxy (DE // Ox) ;
- segmentul de dreaptă EF, de lungime 40 cm, aflat pe o paralelă la Oz.

Cele șase componente vor fi numerotate de la 1 la 6. Coordonatele centrului de masă se calculează cu formulele :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^6 l_i x_i}{\sum_{i=1}^6 l_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^6 l_i y_i}{\sum_{i=1}^6 l_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^6 l_i z_i}{\sum_{i=1}^6 l_i}$$

unde x_i, y_i, z_i reprezintă coordonatele centrului de masă pentru bara nr. i iar l_i lungimea acesteia. Se completează datele în tabelul T 4.2.

Corp	l_i	x_i	y_i	z_i	$l_i x_i$	$l_i y_i$	$l_i z_i$
1	60	0	0	30	0	0	1800
2	80	40	0	0	3200	0	0
3	100	80	50	0	8000	5000	0
4	30π	$80 - \frac{60}{\pi}$	130	0	$2400\pi - 1800$	3900π	0
5	20	90	160	0	1800	3200	0
6	40	100	160	-20	4000	6400	-800
Σ	$30(10 + \pi)$				$800(19 + 3\pi)$	$100(146 + 39\pi)$	1000

Tabelul T 4.2

Rezultă valorile:

$$x_C = \frac{80(19 + 3\pi)}{3(10 + \pi)}, \quad y_C = \frac{10(146 + 39\pi)}{3(10 + \pi)}, \quad z_C = \frac{100}{3(10 + \pi)}$$

R 4.3) Să se determine poziția centrului de masă pentru placa plană omogenă din figura R 4.3. Dimensiunile sunt date în cm.

Rezolvare: Pentru determinarea centrului de masă se folosesc formulele :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i x_i}{\sum_{i=1}^4 A_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i y_i}{\sum_{i=1}^4 A_i}$$

unde x_i, y_i reprezintă coordonatele centrului de masă pentru placa nr. i iar A_i aria sa. S – a considerat o împărțire a plăcii din figura R 4.3 în patru plăci elementare (vezi tabelul care urmează).

Corp	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	120	6	5	720	600

2	$\frac{27\pi}{4}$	$-\frac{4}{3\pi}$	$10 + \frac{4}{3\pi}$	- 9	$9 + \frac{135\pi}{2}$
3	- 4	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{8}{3}$
4	- 9 π	$12 - \frac{8}{\pi}$	$\frac{8}{\pi}$	$72 - 108\pi$	- 72
Σ	$116 - \frac{9\pi}{4}$			$\frac{2333}{3} - 108\pi$	$\frac{1603}{3} + \frac{135\pi}{2}$

Tabelul R 4.3

$$x_C = \frac{\frac{2333}{3} - 108\pi}{116 - \frac{9\pi}{4}} \cong 4.024, \quad y_C = \frac{\frac{1603}{3} + \frac{135\pi}{2}}{116 - \frac{9\pi}{4}} \cong 6.852$$

Observație : Figurile nehașurate corespund corpurilor introduse artificial pentru completarea la o figură elementară (aici, la un dreptunghi). Ariile lor se consideră cu semnul “-”.

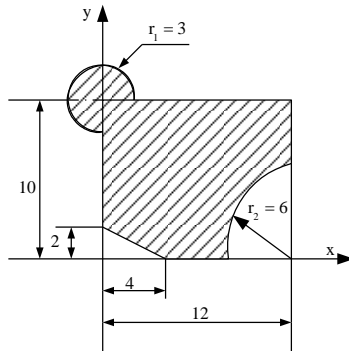


Figura R 4.3

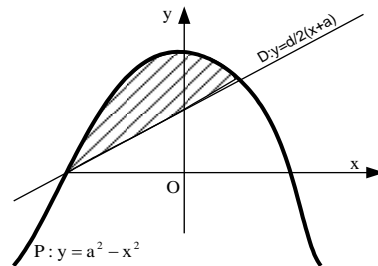


Figura R 4.4

R 4.4) Să se determine poziția centrului de masă pentru placa plană omogenă din figura R4.4 , mărginită de parabola de ecuație $y = a^2 - x^2$ și dreapta $y = \frac{a}{2}(x + a)$, unde $a > 0$ este o constantă dată.

Rezolvare: $x_C = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x(g(x) - f(x))dx}{\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))dx}, \quad y_C = \frac{\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (g^2(x) - f^2(x))dx}{\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))dx},$

unde $g(x) = a^2 - x^2$, $f(x) = \frac{a}{2}(x+a)$ iar x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $g(x) = f(x)$,
 adică $x_1 = -a, x_2 = \frac{a}{2}$. În urma calculului integralelor se găsește că
 $x_C = -\frac{a}{2}, y_C = \frac{23}{30}a^2$.

R 4.5) Să se determine poziția centrului de masă pentru corpul omogen semisferic de rază R din figura R 4.5.

Rezolvare: Axa Oz fiind axă de simetrie putem scrie că
 $x_C = y_C = 0, z_C = \frac{\int_D z dV}{\int_D dV}$, unde D este domeniul ocupat de corp. Folosind sistemul de
 coordonate sferice (ρ, θ, φ) și observând că :

$$z = \rho \sin \varphi, \quad dV = \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

găsim că :

$$\int_D z dV = \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\int_D dV = \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3}$$

astfel încât $z = \frac{3}{8}R$.

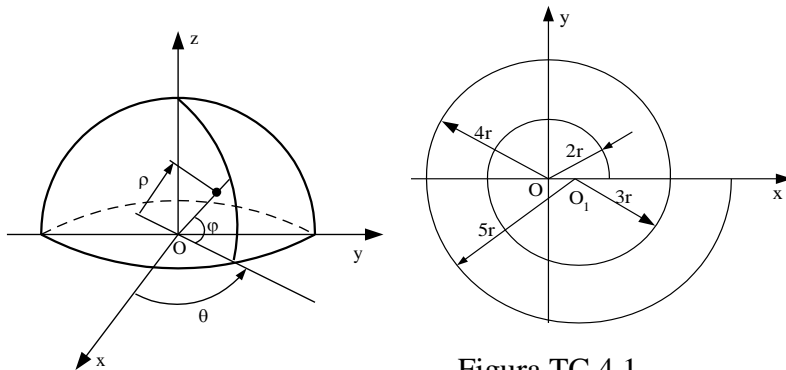


Figura TC 4.1

4.7. Probleme propuse

4.7.1 Teste clasice

TC 4.1) Să se determine poziția centrului de masă pentru bara omogenă din figura TC 4.1.

TC 4.2) Să se determine poziția centrului de masă pentru placa plană omogenă din figura TC 4.2.

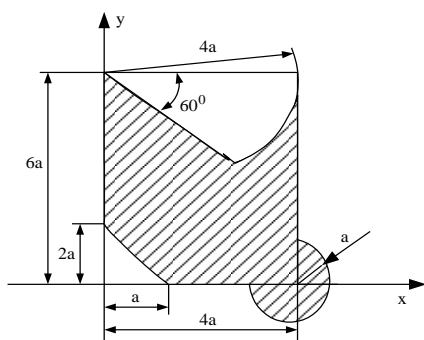


Figura TC 4.2

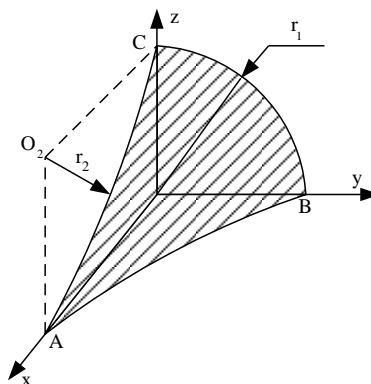


Figura TC 4.3

TC 4.3) Se consideră corpul din figura TC 4.3, realizat din trei plăci plane omogene confecționate din materiale diferite. Plăcile din planele Oxy și Oyz au densitatea superficială ρ iar placa din planul Oxz are densitatea superficială 2ρ . Cunoscând razele $r_1 = r_2 = l$, să se determine coordonatele centrului de masă.

TC 4.4) Să se determine poziția centrului de masă pentru placa plană omogenă din figura TC 4.4.

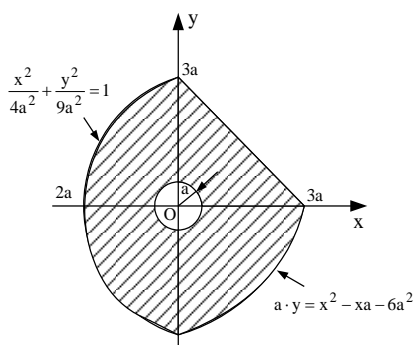


Figura TC 4.4

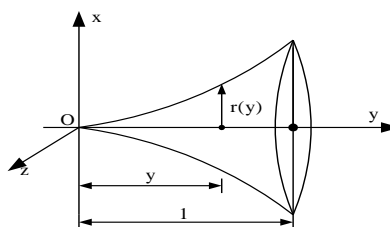


Figura TC 4.5

TC 4.5) Determinați centrul de masă al corpului omogen de revoluție din figura TC 4.5 știind că legea de variație a razei (distanța de la axa Oy la suprafața corpului) este

$$r(y) = \frac{1}{20} y^2 \text{ (m)}.$$

4.7.2. Teste grilă

TG 4.1) Să se determine abscisa centrului de masă pentru o bară dreaptă AB, de lungime L , la care densitatea variază linear de la valoarea ρ_1 în capătul A la valoarea ρ_2 în capătul B (figura TG 4.1).

a) $x_C = \frac{(\rho_1 + 2\rho_2)L}{3(\rho_1 + \rho_2)}$; b) $x_C = \frac{(2\rho_1 + \rho_2)L}{3(\rho_1 + \rho_2)}$; c) $x_C = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) L$;
d) $x_C = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1\rho_2} \frac{L}{2}$.

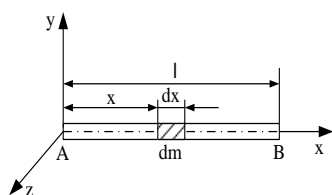


Figura TG 4.1

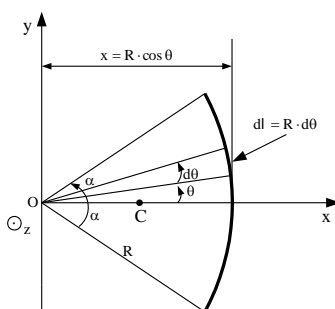


Figura TG 4.2

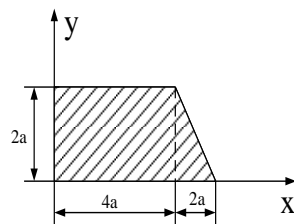


Figura TG 4.3

TG 4.2) Să se determine abscisa centrului de masă a unei bare omogene AB, de secțiune constantă, în formă de arc de cerc de rază R și unghi la centru 2α , unghiul α fiind exprimat în radiani (figura TG 4.2).

a) $x_C = 0$; b) $x_C = \frac{2R}{3}$; c) $x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; d) $x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

TG 4.3) Centrul de masă al plăcii plane omogene având forma și dimensiunile din Figura TG 4.3 are coordonatele:

a) $x_C = y_C = \frac{2a}{3}$; b) $x_C = \frac{20a}{13}, y_C = \frac{5a}{13}$; c) $x_C = \frac{5a}{13}, y_C = \frac{4a}{13}$; d)
 $x_C = \frac{38a}{15}, y_C = \frac{14a}{15}$.

4.8. Indicații și răspunsuri

TC 4.1) Se împarte bara în patru semicercuri de raze $2r, 3r, 4r$ și $5r$ și se procedează ca la rezolvarea problemei R 4.2. Se obține $x_C = \frac{4r}{7}, y_C = -\frac{2r}{\pi}$.

TC 4.2) Se completează placa până la un dreptunghi plin. Părțile componente sunt: un dreptunghi de laturi $6a$ și $4a$, un triunghi dreptunghic de catete $2a$ și a , un sector de cerc de rază $4a$ și unghi la centru 60° și un sector de cerc de rază a și unghi la centru 270° (vezi și rezolvarea problemei R 4.3). Ariile triunghiului și sectorului de cerc de rază $4a$ se consideră negative. Se obțin coordonatele:

$$x_C = \frac{4(144 + 9\pi - 32\sqrt{3})a}{23(12 - \pi)} \quad , \quad y_C = \frac{4(245 - 48\pi)a}{23(12 - \pi)} .$$

TC 4.3) Pentru determinarea coordonatelor centrului de masă se folosesc formulele :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i x_i}{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i} \quad , \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i y_i}{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i} \quad , \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i z_i}{\sum_{i=1}^4 \rho_i A_i}$$

deoarece în cazul unui corp omogen de tip placă are loc relația $m_i = \rho_i A_i$.

Se consideră că placa plană din planul Oxz a fost obținută dintr-o placă pătrată de latură l (placa 1) din care s-a scos un sfert de disc de rază r_2 (placa 2) . Aria plăcii 2 se consideră cu semn negativ . Se obțin valorile:

$$x_C = \frac{2(11 - 3\pi)}{3(10 - \pi)} l \cong 0,153l \quad , \quad y_C = \frac{2}{10 - \pi} l \cong 0,292l \quad , \quad z_C = \frac{2(4 - \pi)}{10 - \pi} l \cong 0,250l$$

TC 4.4) Placa este formată din patru porțiuni: triunghiul dreptunghic și isoscel de catete $3a$ din cadranul I, interiorul sfertului de elipsă din cadranul II, interiorul arcului de parabolă din cadranele III și IV și discul de rază a cu centrul în origine (a cărei arie se consideră negativă (vezi și rezolvarea problemelor R 4.3 și R 4.4). Se obțin coordonatele :

$$x_C = \frac{131a}{2(3\pi + 152)} \quad , \quad y_C = -\frac{499a}{2(3\pi + 152)} .$$

TC 4.5) Se împarte corpul în cilindri infimezimali de rază r și înălțime dy prin secțiuni

cu plane paralele cu planul Oxz. Avem că: $x_C = z_C = 0$, $y_C = \frac{\int_D y dV}{\int_D dV} = \frac{3}{4}$, deoarece:

$$\int_D dV = \int_0^1 \pi r^2 dy = \frac{\pi}{60}, \quad \int_D y dV = \int_0^1 \pi r^2 y dy = \frac{\pi}{80},$$

D fiind domeniul din spațiu ocupat de corpul de revoluție.

TG 4.1) Se împarte bara în cilindri infimezimali de lungime dx . Avem că

$y_C = z_C = 0$, $x_C = \frac{\int_{AB} x dm}{\int_{AB} dm} = \frac{(\rho_1 + 2\rho_2)L}{3(\rho_1 + \rho_2)}$, deoarece:

$$\int_{AB} x dm = \int_{AB} x \rho(x) dx = \int_0^L x \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{L} + \rho_1 \right) dx = \frac{(\rho_1 + 2\rho_2)L^2}{6}$$

$$\int_{AB} dm = \int_{AB} \rho(x) dx = \int_0^L \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{L} + \rho_1 \right) dx = \frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{2} .$$

Răspuns corect: **a**).

TG 4.2) Se împarte bara în elemente de arc infinitesimale de lungime $dl = R d\theta$. Se

obține că: $y_C = z_C = 0$, $x_C = \frac{\int_{AB} x dl}{\int_{AB} dl} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, deoarece:

$$\int_{AB} dl = \int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta = 2\alpha R, \quad \int_{AB} x dl = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \theta d\theta = 2R^2 \sin \alpha.$$

Răspuns corect: **d**).

TG 4.3) Se împarte placa în două: dreptunghiul de laturi 2a și 4a și triunghiul dreptunghic și isoscel de catete 2a. Răspuns corect: **d**)

5. Echilibrul punctului material

5.1. Noțiuni introductive

Vom defini în cele ce urmează câteva din noțiunile folosite în acest capitol.

Punctul material liber este punctul material care poate ocupa orice poziție în spațiu.

Punctul material supus la legături (legat) este punctul căruia i se impune o restricție geometrică (de exemplu obligația de a rămâne pe o suprafață sau pe o curbă).

Numărul gradelor de libertate reprezintă numărul de parametrii scalari independenți necesari pentru a determina la un moment dat poziția punctului material (sau a rigidului).

Poziția unui punct material în spațiu este determinată cu ajutorul a trei parametri scalari independenți, ca de exemplu coordonatele carteziene x , y , z . Deci, un punct material liber în spațiu are trei grade de libertate.

Poziția unui punct material pe o suprafață este dată prin doi parametrii scalari independenți. Astfel, dacă suprafața este planul Oxy este suficient să cunoaștem coordonatele x și y ale poziției punctului material. Un punct material aflat pe o suprafață are două grade de libertate.

Un punct material obligat să rămână pe o curbă are doar un singur grad de libertate. El se poate deplasa doar în lungul curbei.

În fine, un punct material fixat nu are nici un grad de libertate.

5.2. Echilibrul punctului material liber

Condiția necesară și suficientă ca un punct material liber, care se află în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă, să rămână în aceeași stare mecanică sub acțiunea unui sistem de n forțe concurente, $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$, este ca rezultanta \vec{R} a forțelor să fie nulă. Această condiție rezultă din aplicarea principiilor inerției și acțiunii forței.

În consecință, condiția de echilibru a punctului material liber este :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

(5.1)

Proiectând această relație vectorială pe axele unui sistem cartezian $Oxyz$ se obțin ecuațiile scalare de echilibru :

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad , \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad , \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

(5.2)

Dacă sistemul de forțe este plan și dacă notăm cu Oxy planul forțelor, condițiile scalare de echilibru au forma :

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad , \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

(5.3)

5.3. Echilibrul punctului material legat. Axioma legăturilor. Clasificarea legăturilor.

5.3.1. Axioma legăturilor

Se consideră un punct material M aflat în echilibru pe o suprafață (S) și acționat de un sistem de forțe exterioare a căror rezultantă este \vec{R} (figura T 5.1). Spre deosebire de cazul punctului material liber, când era necesar ca $\vec{R} = \vec{0}$ pentru a se realiza echilibrul, această condiție nu mai trebuie respectată pentru punctul material legat ca urmare a existenței legăturilor, care exercită asupra punctului material anumite constrângeri mecanice reprezentate prin forțe de legătură (reacțiuni). Pentru a rezolva problema punctului material legat se folosește **axioma legăturilor**, al cărui enunț în cazul general este :

Axioma legăturilor : *Orice legătură poate fi suprimată și înlocuită cu elemente mecanice (forțe, momente) corespunzătoare.*

În cazul unui punct material legat, legătura se înlocuiește cu o reacțiune \vec{R}' , astfel încât *condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor direct aplicate și a forței de legătura să fie nulă :*

$$\vec{R} + \vec{R}' = \vec{0}$$

(5.4)

adică reacțiunea (forța de legătură) \vec{R}' să fie direct opusă rezultantei \vec{R} a forțelor direct aplicate.

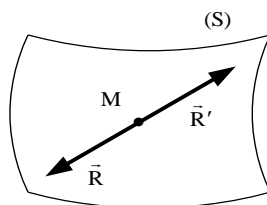


Figura T 5.1

Observația i) În cazul în care punctul material este supus mai multor legături atunci \vec{R}' reprezintă rezultanta forțelor de legătură corespunzătoare fiecărei legături în parte.

5.3.2. Clasificarea legăturilor punctului material

Legăturile punctului material sunt în număr de trei și anume: *rezemarea pe o suprafață, rezemarea pe o curbă* (plană sau strâmbă) și *prinderea cu fire*.

Ele pot fi:

- cu frecare** – dacă suprafața sau curba de reazem aparțin unor corpuri reale, care au la suprafață asperități care se opun deplasării dând naștere unor forțe de frecare.

- b) **fără frecare** – atunci când se presupune că suprafața sau curba de reazem aparțin unor corpuri ideale, perfect lucioase, care nu conduc la apariția unor forțe de frecare.

5.4. Echilibrul punctului material supus la legături fără frecare

5.4.1. Echilibrul pe o suprafață fără frecare (lucie, netedă)

Se consideră un punct material M rezemat pe o suprafață (S) și acționat de forțe direct aplicate a căror rezultantă este \vec{R} și de reacțiunea \vec{R}' (direct opusă lui \vec{R}). Rezultanta \vec{R} (figura T 5.2) se descompune în:

- componenta normală \vec{R}_n (după normala în M la (S));
- componenta tangențială \vec{R}_t (din planul tangent (P) la (S)).

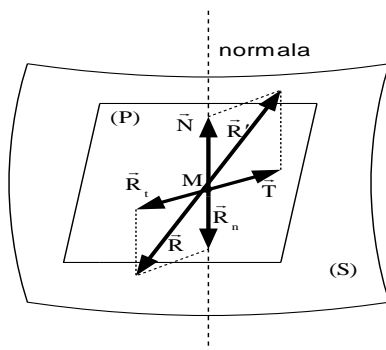


Figura T 5.2

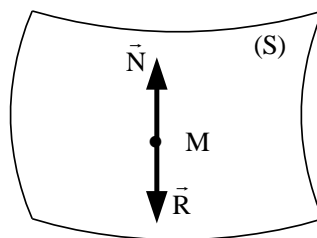


Figura T 5.3

La rândul ei, reacțiunea \vec{R}' se descompune după aceleași direcții în componentele \vec{N} și \vec{T} . Forța \vec{R}_n caută să îndepărteze punctul M de pe suprafața (S) . Efectul ei este anulat de forța \vec{N} , numită *reacțiune normală*:

$$\vec{R}_n + \vec{N} = \vec{0} \quad (5.5)$$

Forța \vec{R}_t determină deplasarea punctului M pe suprafața (S) . Ei i se opune componenta \vec{T} , numită *forță de frecare*:

$$\vec{R}_t + \vec{T} = \vec{0} \quad (5.6)$$

Deoarece suprafața este considerată lucie (fără frecare), forța \vec{T} este nulă astfel încât utilizând relația (5.6) putem scrie că:

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t = \vec{R}_n \quad (5.7)$$

adică, pentru a se realiza echilibrul pe suprafața (S), rezultanta forțelor direct aplicate trebuie să fie dirijată după normala la suprafață în punctul respectiv (figura T 5.3).

Ecuția vectorială de echilibru este:

$$\vec{R} + \vec{N} = \vec{0} \quad (5.8)$$

și ea are următoarele proiecții pe axele unui reper cartezian:

$$R_x + N_x = 0 \quad , \quad R_y + N_y = 0 \quad , \quad R_z + N_z = 0 \quad (5.9)$$

Dacă suprafața (S) este dată prin ecuația $f(x, y, z) = 0$, deoarece parametrii directori ai normalei sunt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, reacțiunea normală va avea expresia:

$$\vec{N} = \lambda \cdot \text{grad } f = \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (5.10)$$

iar ecuația vectorială de echilibru va fi:

$$\vec{R} + \lambda \cdot \text{grad } f = \vec{0} \quad (5.11)$$

Ecuțiile scalare de echilibru

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (5.12)$$

formează împreună cu ecuația suprafeței $f(x, y, z) = 0$ un sistem de patru ecuații în necunoscutele λ, x, y, z .

5.4.2. Echilibrul pe o curbă fără frecare (lucie, netedă)

Se consideră un punct material M rezemat pe o curbă (C) și acționat de forțe direct aplicate a căror rezultantă este \vec{R} și de reacțiunea \vec{R}' (figura T 5.4). Rezultanta \vec{R} se descompune în:

- componenta \vec{R}_t (după tangenta în M la curba (C));
- componenta \vec{R}_n (din planul normal în M la curba (C)).

Reacțiunea \vec{R}' se descompune după aceleași direcții în componentele \vec{T} și \vec{N} . Relațiile (5.5) și (5.9) precum și comentariile asociate lor rămân valabile și în acest caz (figura T 5.5).

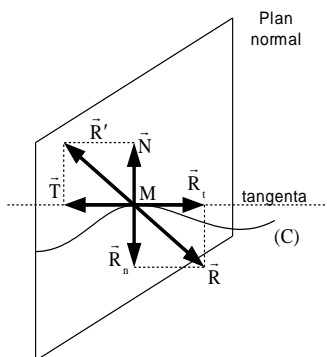


Figura T 5.4

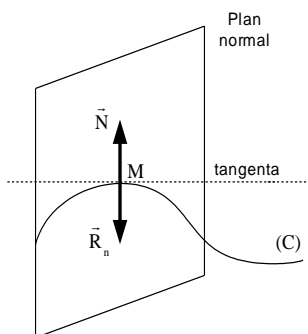


Figura T 5.5

Dacă curba este dată ca intersecție de două suprafețe:

$$(S_1): f_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad (S_2): f_2(x, y, z) = 0 \quad (5.13)$$

atunci planul normal la curba (C) poate fi obținut cu ajutorul normalelor la cele două suprafețe, reacțiunea normală având forma:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2 \quad (5.14)$$

Din (5.8) și (5.13) se obțin următoarele ecuații scalare de echilibru:

$$R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad , \quad R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \quad (5.15)$$

care împreună cu ecuațiile (5.13) ale suprafețelor formează un sistem de cinci ecuații în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, x, y, z$.

5.5. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare.

Legile frecării uscate. Conuri de frecare.

5.5.1. Legile frecării uscate (legile lui Coulomb)

Se consideră un punct material M aflat pe o suprafață sau pe o curbă (aspră). Pentru a pune în evidență forța de frecare Coulomb a recurs la următoarea experiență efectuată cu un aparat numit **tribometru**:

Un corp asimilabil cu un punct material de greutate \vec{G} este așezat pe un plan orizontal și acționat de o forță \vec{F} (prin intermediul unor greutateți puse pe un talger) care poate varia continuu de la 0 la ∞ (figura T 5.6). Se constată că până la o anumită valoare \vec{F}_{\max} corpul nu se pune în mișcare.

Aceasta dovedește că reacțiunea \vec{R}' este înclinată cu un unghi α față de normală, căci, în caz contrar, sub acțiunea forței \vec{F} corpul s-ar deplasa oricât de mică ar fi intensitatea acestei forțe. Reacțiunea \vec{R}' se descompune în componentele sale: reacțiunea normală \vec{N} și forța de frecare de alunecare \vec{T} .

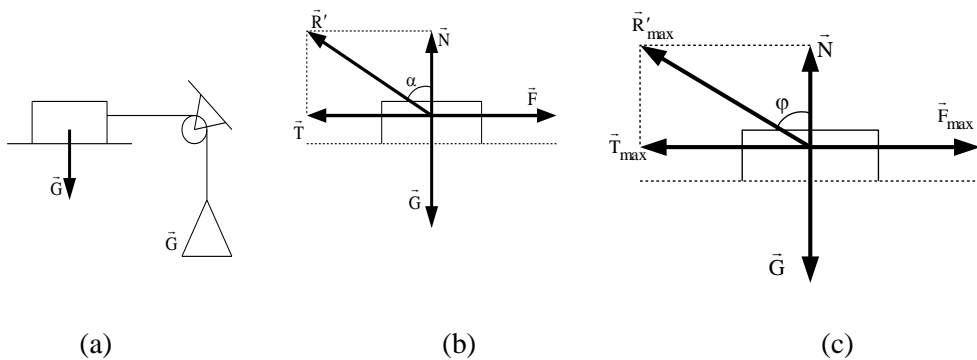


Figura T 5.6

Forța \vec{T} acționează, pentru cazul general al unei suprafețe de reazem oarecare, în planul tangent la suprafață și se opune tendinței de mișcare.

Modulul său este:

$$|\vec{T}| = |\vec{N}| \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (5.16)$$

În figura T 5.6.c este prezentat cazul limită când forțele \vec{F} și \vec{T} iau valorile maxime la echilibru (orice depășire a acestei valori pentru \vec{F} ducând la ruperea echilibrului). Unghiul α are și el o valoare maximă pe care o vom nota cu φ și o vom numi *unghi de frecare*. Putem scrie

$$\left| \vec{T}_{\max} \right| = \left| \vec{N} \right| \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

(5.17)

și cum $\alpha \leq \varphi$ găsim că:

$$\left| \vec{T} \right| \leq \left| \vec{N} \right| \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

(5.18)

Coulomb a enunțat următoarele legi, numite *legile frecării uscate* (vezi și relația

(5.17)):

- 1) *Mărimea forței de frecare de alunecare maximă este direct proporțională cu mărimea reacțiunii normale;*
- 2) *Mărimea forței de frecare de alunecare depinde de natura și starea suprafeței corpurilor aflate în contact;*
- 3) *Mărimea forței de frecare de alunecare nu depinde de viteza relativă de deplasare a celor două corpuri aflate în contact și nici de mărimea suprafețelor de contact.*

Pe baza acestor legi forța de frecare de alunecare are expresia:

$$\left| \vec{T} \right| \leq \left| \vec{T}_{\max} \right| = \mu \cdot \left| \vec{N} \right|$$

(5.19)

unde $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ se numește *coeficient de frecare de alunecare* și este o mărime adimensională ce depinde de natura și starea suprafețelor aflate în contact.

Coulomb a considerat că forțele de frecare apar datorită existenței la suprafața corpurilor a unor asperități care în cazul a două corpuri în contact se întrepătrund. Când unul dintre corpuri se mișcă (sau amândouă) aceste asperități sunt strivite, forța de frecare de alunecare fiind tocmai forța care se opune acestor striviri.

Observații: Ulterior experimentelor lui Coulomb, prin extinderea acestora, s-au făcut o serie de corecții acestor legi. Astfel, se constată că odată cu creșterea vitezei corpurilor aflate în contact coeficientul de frecare scade, variația lui fiind dată în figura 5.7. Valoarea μ_0 a coeficientului de frecare la viteză nulă se numește *coeficient de aderență*.

De asemenea, pentru valori mari ale reacțiunii \vec{R}' mărimea forței de frecare nu mai variază liniar cu mărimea reacțiunii.

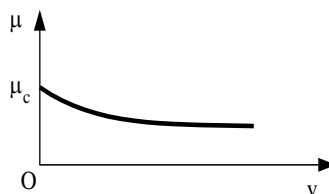


Figura T 5.7

5.5.2. Conuri de frecare

Să analizăm în cele ce urmează aspectul geometric al echilibrului punctului material cu frecare. Considerând punctul rezemat pe o suprafață și schimbând direcția forței \vec{F} în planul tangent reacțiunea \vec{R}' , respectiv rezultanta \vec{R} , vor descrie un con, numit *con de frecare*, care are vârful în punctul M și unghiul la vârf 2φ (figura T 5.8).

Punctul material se găsește în echilibru atunci când reacțiunea \vec{R}' se află în interiorul conului de frecare sau, la limită, pe suprafața acestuia.

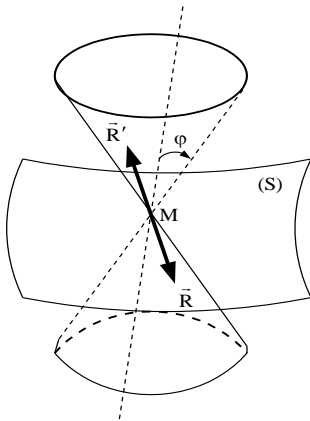


Figura T 5.8

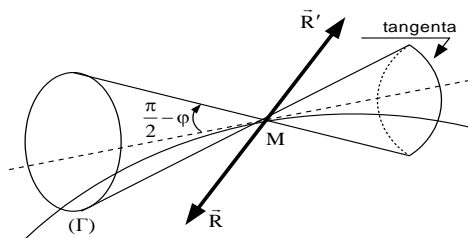


Figura T 5.9

În cazul unui punct material rezemat cu frecare pe o curbă (Γ), deoarece prin acea curbă trec o infinitate de suprafețe și la fiecare îi revine câte un con de frecare generatoarele extreme ale acestora vor descrie *conuri complementare de frecare* (figura 5.9). Aceste conuri au ca axă de simetrie tangenta la curbă în punctul considerat și unghiul la vârf $2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Punctul material se află în echilibru atunci când reacțiunea \vec{R}' se găsește în afara conurilor complementare de frecare sau, la limită, pe suprafața acestora.

5.6. Probleme rezolvate

R 5.1) Bila M, de greutate G, se află în echilibru pe un plan neted înclinat cu unghiul α față de orizontală, fiind prinsă cu două fire paralele cu planul înclinat care fac

unghiurile β și γ cu dreapta de cea mai mare pantă a planului (figura R 5.1.1). Să se determine tensiunile din fire și reacțiunea planului .

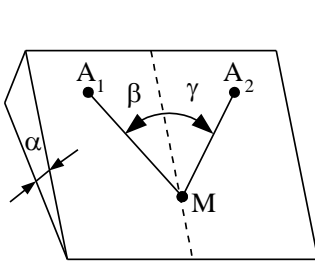
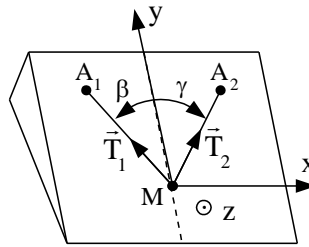
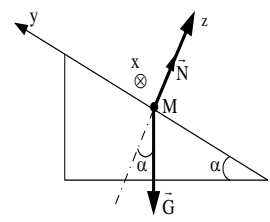


Figura R 5.1.1



(a)



(b)

Figura R 5.1.2.

Rezolvare: Se notează cu \vec{T}_1 și \vec{T}_2 tensiunile din firele MA_1 și MA_2 și cu \vec{N} reacțiunea normală (vezi figura R 5.1.2). Pentru echilibru se impune condiția: $\vec{G} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{N} = \vec{0}$. Proiectând această relație vectorială pe axele reperului cartezian Mxyz rezultă ecuațiile scalare:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= T_2 \sin \gamma - T_1 \sin \beta = 0 \\ \sum Y_i &= -G \sin \alpha + T_1 \cos \beta + T_2 \cos \gamma = 0 \\ \sum Z_i &= N - G \cos \alpha = 0\end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$N = G \cos \alpha, T_1 = G \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}, T_2 = G \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

R 5.2. Se consideră curba lucie de ecuație $y = \sqrt{x}$, raportată la sistemul de axe Oxy, planul curbei făcând unghiul α cu planul orizontal. Un inel de greutate G poate aluneca pe această curbă fiind acționat și de forța F, paralela cu Ox (figura R 5.2.1). Să se determine poziția de echilibru a inelului pe curbă și reacțiunile N_1 (din planul curbei) și N_2 (perpendiculară pe planul curbei) .

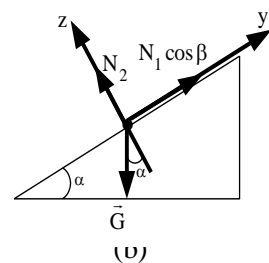
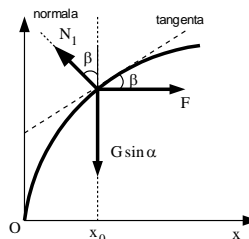
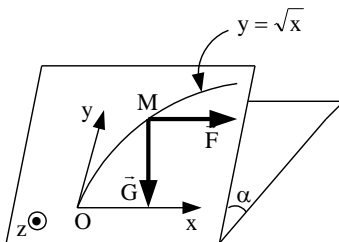


Figura R 5.2.1

Figura R 5.2.2.

Rezolvare: Fie x_0 abscisa punctului de echilibru și

$$\beta = \arctg f'(x_0) = \arctg \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ unghiul format de tangenta la curba } y = \sqrt{x} \text{ cu axa Ox}$$

în acest punct (vezi figura R 5.2.2). Pentru echilibru: $\vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F} = \vec{0}$. Pe axele reperului Oxyz avem următoarele ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{cases} \sum X_i = F - N_1 \sin \beta = 0 \\ \sum Y_i = N_1 \cos \beta - G \sin \alpha = 0 \\ \sum Z_i = N_2 - G \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{G^2}{4F^2} \sin^2 \alpha \\ N_1 = \sqrt{F^2 + G^2 \sin^2 \alpha} \\ N_2 = G \cos \alpha \end{cases}$$

R 5.3. Un inel de greutate G , rezemat cu frecare (coeficient de frecare μ) pe un cerc vertical este acționat cu forța orizontală \vec{F} , de modul egal cu G . Să se determine pozițiile de echilibru ale inelului, date de unghiul θ (figura R 5.3).

Rezolvare: a) *Tendința de deplasare a inelului spre punctul A:*

$$\sum X_i = T + F \cos \theta - G \sin \theta = 0$$

(1)

$$\sum Y_i = N - F \sin \theta - G \cos \theta = 0$$

(2)

$$\text{Pentru echilibru: } T \leq \mu N$$

(3)

$$(1) \Rightarrow T = G \sin \theta - F \cos \theta, \quad (2) \Rightarrow N = F \sin \theta + G \cos \theta$$

$$(3) \Rightarrow \operatorname{tg} \theta \leq \frac{F + \mu G}{G - \mu F}$$

(4)

b) *Tendința de deplasare a inelului spre punctul B:*

$$\text{Inversând sensul forței de frecare se obține: } \operatorname{tg} \theta \geq \frac{F - \mu G}{G + \mu F}$$

(5)

$$\text{Deoarece } G = F, \text{ din (4) și (5) găsim că } \operatorname{tg} \theta \in \left[\frac{1 - \mu}{1 + \mu}, \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right].$$

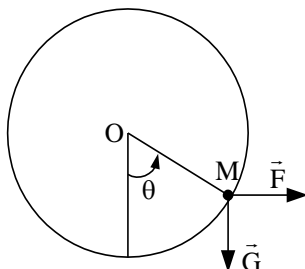


Figura R 5.3

R 5.4. Să se determine coeficientul de frecare de alunecare pentru care un punct material este în echilibru pe suprafața de ecuație $x^2 + y^2 = R(R - z)$, în poziția $M\left(x, y, \frac{R}{2}\right)$, sub acțiunea greutății \vec{G} și a forței elastice $\vec{F} = \frac{2G}{R} \cdot \overline{MA}$, unde $M\left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$.

Rezolvare: Echilibrul pe o suprafață aspră se realizează dacă suportul rezultantei forțelor aplicate se găsește în interiorul conului de frecare. Pentru un punct situat pe suprafața $f(x, y, z) = 0$ trebuie îndeplinită condiția:

$$\frac{\left| X \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + Z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (1)$$

unde X, Y, Z sunt componentele rezultantei \vec{R} . Dar:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R(R - z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = R \quad (2)$$

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{F} = -G \vec{k} + \frac{2G}{R} \left(-x \vec{i} - y \vec{j} \right) \Rightarrow X = -\frac{2G}{R} x, Y = -\frac{2G}{R} y, Z = -G \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) și ecuația suprafeței se obține $\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5.7. Probleme propuse

5.7.1. Teste clasice

TC 5.1) Sarcina $Q = 100 \text{ daN}$ este susținută de bara AO, articulată în O și înclinată cu un unghi de 45° față de un perete vertical și de două lanțuri BA și CA de lungimi egale, așezate orizontal ($m(\hat{CBA}) = m(\hat{ACB}) = 45^\circ$). Se cere să se determine eforturile din bara AO și din cele două lanțuri (figura TC 5.1).

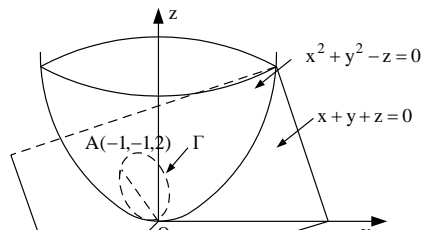
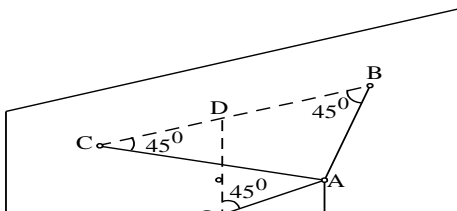


Figura TC 5.1

Figura TC 5.2

TC 5.2) Se consideră curba lucie (Γ) dată ca intersecție între paraboloidul de rotație de ecuație $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ și planul (P) de ecuație $g(x, y, z) = x + y + z = 0$. Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct pe această curbă dacă el este acționat de propria greutate $\vec{G} = -mg \vec{k}$ și de forța $\vec{F} = mg(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ (figura TC 5.2).

TC 5.3) Pe fețele $ABB'A'$ și $ACC'A'$ ale prisme $ABCA'B'C'$ ($m(\hat{BAC}) = m(\hat{ACB}) = 45^\circ$) sunt așezate corpurile de greutate P , respectiv Q . Corpurile sunt legate printr-un fir care trece peste scripetele fără frecare din B (firul este dirijat după paralele la AB și BC). Dacă $Q = 2P$ iar coeficientul de frecare de alunecare dintre corpuri și prismă este μ , să se determine valorile minime și maxime ale unghiului de înclinare α al prisme pentru realizarea echilibrului (figura TC 5.3).

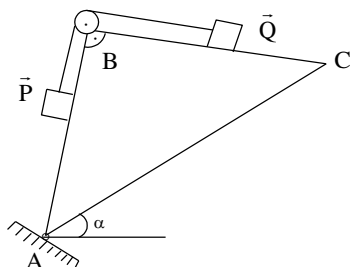


Figura TC 5.3

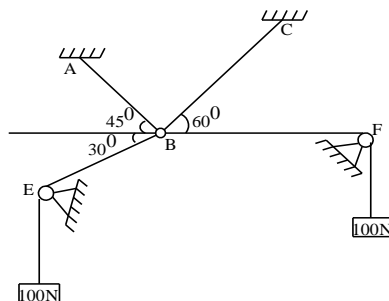


Figura TG 5.1

TC 5.4) Să se determine pozițiile în care un punct material greu poate rămâne în repaus pe o sferă aspră de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, coeficientul de frecare fiind μ .

5.7.2. Teste grilă

TG 5.1) Determinați tensiunea din cablurile AB și BC solicitate ca în figura TG 5.1. Scripetii din E și F sunt fără frecare.

- a) $T_{AB} = 100(2\sqrt{2} - \sqrt{6}), T_{BC} = 100(2 - \sqrt{3})$; b)
 $T_{AB} = 100(1 + \sqrt{3}), T_{BC} = 200(\sqrt{6} - \sqrt{2})$;
 c) $T_{AB} = 100(2\sqrt{2} + \sqrt{6}), T_{BC} = 100(2 + \sqrt{3})$; d)
 $T_{AB} = 100(\sqrt{2} + \sqrt{3}), T_{BC} = 100(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

TG 5.2) O sferă de greutate P este rezemată pe o suprafață cilindrică lucie de rază r , fiind suspendată printr-un fir de punctul fix A. Cunoșcând lungimea l a firului și unghiurile α și β , să se determine tensiunea din fir și reacțiunea suprafeței cilindrice (figura TG 5.2).

- a) $T = P \frac{r}{l} \sin \alpha, N = P \frac{r}{l} \sin \beta$; b) $T = P \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, N = P \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$;
 c) $T = P \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, N = P \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; d) $T = P \frac{l}{r} \sin \beta, N = P \frac{r}{l} \sin \alpha$.

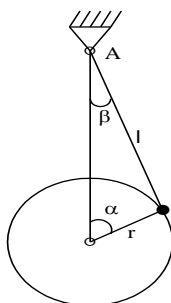


Figura TG 5.2

5.8. Indicații și răspunsuri

TC 5.1) Notăm cu S_1 și S_2 tensiunile din lanțuri și cu S_3 efortul din bara OA. Ecuațiile de echilibru pe trei direcții perpendiculare sunt:

$$S_1 \cos 45^\circ + S_2 \cos 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$-Q + S_3 \cos 45^\circ = 0$$

și are soluția $S_1 = S_2 = \frac{S_3}{2} = 70,5 \text{ daN}$.

TC 5.2) Ecuația vectorială de echilibru $\vec{G} + \vec{F} + \underbrace{\lambda_1 \cdot \text{grad } f + \lambda_2 \cdot \text{grad } g}_{=\vec{N}} = \vec{0}$ se

proiectează pe axele reperului cartezian Oxyz:

$$\sum X_i = mg + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\sum Y_i = mg + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\sum Z_i = -mg - mg + \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Se obține sistemul de cinci ecuații în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, x, y, z$:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0, \quad g(x, y, z) = x + y + z = 0,$$

$$mg + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad mg + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad -2mg - \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

cu soluția:

- a) $x_1 = y_1 = z_1 = 0, \lambda_1 = -3mg, \lambda_2 = -mg$;
b) $x_2 = y_2 = -1, z_2 = 2, \lambda_1 = 3mg, \lambda_2 = 5mg$.

TC 5.3) Se studiază tendința de mișcare a sistemului celor două corpuri spre punctul C (figura TC 5.3.2).

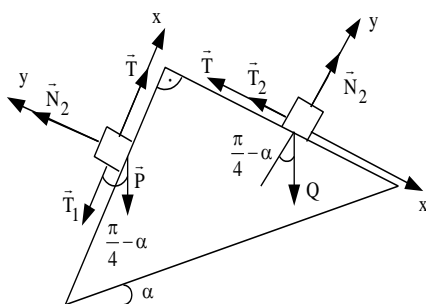


Figura TC 5.3.2

Ecuațiile scalare de echilibru pentru corpul de greutate P sunt:

$$\sum X_i = T - T_1 - P \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_i = N_1 - P \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0 \quad (2)$$

$$T_1 \leq \mu N_1 \quad (3)$$

iar pentru corpul de greutate Q:

$$\sum X_i = -T - T_2 + Q \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_i = N_2 - Q \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0 \quad (5)$$

$$T_2 \leq \mu N_2 \quad (6)$$

Din acest sistem găsim că $\alpha \geq \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{1-3\mu}{3+\mu}$. Studiind și tendința de mișcare a sistemului celor două corpuri spre A deducem și valoarea maximă a unghiului α : $\alpha \leq \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{1+3\mu}{3-\mu}$. S-a folosit faptul că $G=2P$ și $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1-\operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg} \alpha}$. Echilibrul se realizează dacă $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

TC 5.4) Se impune condiția $\frac{\left| \vec{R} \cdot \operatorname{grad} f \right|}{\left| \vec{R} \right| \cdot \left| \operatorname{grad} f \right|} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \Leftrightarrow$

$$\frac{\left| R_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + R_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

unde $R_x = R_y = 0, R_z = G, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$. Se obține că:

$$|z| \in \left[\frac{r}{\sqrt{1+\mu^2}}, r \right], x, y = \text{arbitrari}.$$

TG 5.1) Tensiunile din firele BE și BF sunt fiecare egale cu 100. Ecuațiile de echilibru pe orizontală și verticală sunt:

$$T_{AB} \cos 45^\circ - T_{BC} \cos 60^\circ + 100 \cos 30^\circ - 100 = 0$$

$$T_{AB} \sin 45^\circ - T_{BC} \sin 60^\circ - 100 \sin 30^\circ = 0.$$

Răspuns corect: **a**).

TG 5.2) Se proiectează ecuația vectorială de echilibru, $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$, pe verticală și orizontală și se obțin ecuațiile scalare :

$$T \cos \beta + N \cos \alpha - P = 0, \quad T \sin \beta - N \sin \alpha = 0.$$

Răspuns corect: **b**).

6. Echilibrul rigidului

6.1. Echilibrul rigidului liber

Rigidul liber este un corp care poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția lui fiind determinată doar de forțele care-l acționează.

La reducerea sistemelor de forțe în raport cu un punct O s-a arătat că dacă $\vec{R} = \vec{M}_O = \vec{0}$, atunci sistemul de forțe dat este echivalent cu zero și, conform principiului inerției, nu modifică starea mecanică a corpului asupra căruia acționează. Astfel, dacă acesta se găsea în echilibru, atunci el va continua să rămână în repaus și după aplicarea unui astfel de sistem de forțe.

Rezultă că pentru ca un rigid să rămână în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe este necesar și suficient ca în fiecare punct O al acestuia torsorul de reducere să aibă ambele componente nule :

$$\vec{R} = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_O = \vec{0} \quad (6.1)$$

Proiectând cele două ecuații vectoriale pe axele unui sistem cartezian $Oxyz$ se obțin șase ecuații scalare de echilibru :

$$\begin{aligned} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad , \quad M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad , \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad , \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

În cazul unor sisteme particulare de forțe numărul ecuațiilor scalare de echilibru se micșorează. Astfel, pentru un sistem de forțe coplanare ce acționează în planul Oxy ecuațiile de echilibru se reduc la trei :

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad , \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad , \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \quad (6.3)$$

Echilibrul rigidului se realizează pentru o anumită configurație a sa în raport cu un reper, adică pentru poziții bine determinate ale punctelor rigidului în raport cu reperul. Astfel, pentru a cunoaște poziția unui rigid în raport cu un sistem de referință cartezian este suficient a se cunoaște poziția a trei puncte ale sale, deci a se cunoaște nouă coordonate carteziene. Deoarece numai șase dintre coordonate sunt independente (există trei relații între coordonate, care exprimă faptul că distanțele dintre puncte sunt constante) solidul rigid liber în spațiu are șase grade de libertate (deplasări pe Ox , Oy , Oz și rotații în jurul aceluiași axe).

6.2. Echilibrul solidului rigid supus la legături. Generalități

Legăturile la care poate fi supus un rigid sunt mult mai complexe decât acelea la care este supus un punct material însă, oricât de complexe ar fi ele, echilibrul se studiază

la fel. Se eliberează pe rând corpul de legăturile sale și se înlocuiesc, în conformitate cu axioma legăturilor, cu forțe sau cupluri de legătură. Sub acțiunea forțelor date și a forțelor de legătură solidul poate fi considerat liber.

Reducând forțele date și de legătură în raport cu un punct O , arbitrar ales, și notând cu $\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right)$ torsorul forțelor date și cu $\left(\vec{R}', \vec{M}'_O\right)$ torsorul reacțiunilor,

ecuațiile vectoriale de echilibru au forma :

$$\vec{R} + \vec{R}' = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_O + \vec{M}'_O = \vec{0} \quad (6.4)$$

Proiectând aceste ecuații pe axele unui reper cartezian $Oxyz$, obținem șase ecuații scalare de echilibru :

$$\begin{aligned} R_x + R'_x = 0 \quad , \quad R_y + R'_y = 0 \quad , \quad R_z + R'_z = 0 \\ M_{Ox} + M'_{Ox} = 0 \quad , \quad M_{Oy} + M'_{Oy} = 0 \quad , \quad M_{Oz} + M'_{Oz} = 0 . \end{aligned} \quad (6.5)$$

O problemă de echilibru a unui solid rigid supus la legături este determinată dacă numărul total de necunoscute scalare este șase iar dacă el este mai mare atunci problema este nedeterminată, existând posibilitatea unei infinități de poziții de echilibru sau a unei infinități de valori pentru forțele de legătură sau ambele variante.

Orice mișcare a unui solid rigid se poate descompune, în general, în două mișcări fundamentale :

- o mișcare de translație ;
- o mișcare de rotație în jurul unei axe.

Dacă legătura împiedică translația, atunci reacțiunea va fi o forță pe direcția mișcării împiedicate dar de sens opus acesteia. Dacă legătura împiedică o rotație în jurul unei axe, atunci reacțiunea legăturii va fi un cuplu de forțe situat într-un plan perpendicular pe axa respectivă, de sens contrar rotației împiedicate. Vom folosi aceste observații în ceea ce urmează.

6.3. Echilibrul rigidului supus la legături fără frecare

Legăturile rigidului sunt rezemarea (reazemul simplu), articulația, încastrarea și prinderea cu fire. În studiul legăturilor rigidului se urmăresc două aspecte și anume:

- *aspectul geometric*, referitor la numărul de grade de libertate rămase unui rigid după aplicarea legăturii;
- *aspectul mecanic*, legat de elementele mecanice (forțe, momente) cu care se înlocuiește legătura.

În cele ce urmează se vor studia legăturile ideale, adică se vor neglija frecările.

6.3.1. Reazemul simplu

Reazemul simplu reprezintă legătura prin care un punct O al rigidului este obligat să rămână în permanență pe o suprafață sau pe o curbă dată.

Dacă $O(x_O, y_O, z_O)$ și ecuația suprafeței de reazem este $f(x, y, z) = 0$, atunci condiția ca punctul O să aparțină suprafeței, $f(x_O, y_O, z_O) = 0$, va reprezenta încă o relație între cele nouă coordonate ale celor trei puncte necoliniare ce fixează rigidul în spațiu. În consecință, un reazem simplu suprimă unui rigid un grad de libertate astfel încât *un rigid cu un reazem simplu are cinci grade de libertate*.

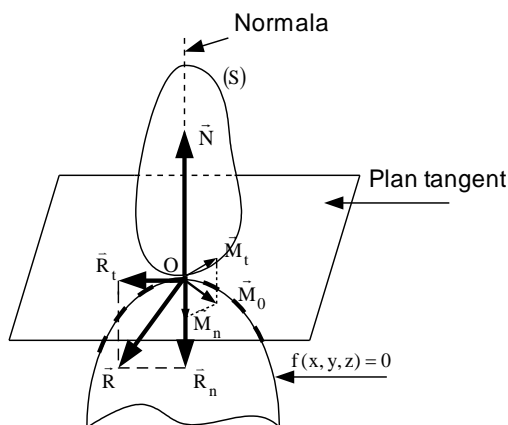


Figura T 6.1

Pentru a studia forțele care apar în O (figura T 6.1) se descompun elementele torsorului $\left(\vec{R}, \vec{M}_O \right)$ al forțelor exterioare în câte două elemente :

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t \quad , \quad \vec{M}_O = \vec{M}_n + \vec{M}_t \quad (6.6)$$

Forța \vec{R}_t și momentele \vec{M}_n, \vec{M}_t tind să pună în mișcare solidul rigid (S). Lipsa frecării face imposibilă oprirea acestor mișcări astfel încât, pentru ca solidul să rămână în echilibru, este necesar ca :

$$\vec{R}_t = \vec{M}_n = \vec{M}_t = \vec{0} \quad (6.7)$$

Rezultă că :

$$\vec{R} = \vec{R}_n \neq \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_O = \vec{0} \quad (6.8)$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii, în O apare forța de legătură $\vec{R}' = \vec{N}$, egală și direct opusă lui \vec{R}_n , astfel că putem afirma că *un reazem fără frecare este înlocuit cu o forță $\vec{R}' = \vec{N}$ (reacțiune normală), dirijată după normala comună în punctul de contact*. Un simbol folosit pentru reazemul simplu este ??? .

6.3.2. Articulația

Articulația este legătura unui solid rigid prin care un punct O al acestuia este obligat să rămână în permanență într-un punct fix.

Articulația poate fi *plană (cilindrică)*, atunci când rigidul este acționat de un sistem de forțe plane, sau *spațială (sferică)*, dacă solidul este acționat de un sistem de forțe spațiale.

a) Cazul articulației sferice

Obligând punctul $O(x_O, y_O, z_O)$ să rămână fix se impun trei condiții geometrice ($x_O, y_O, z_O = \text{constant}$) care reduc numărul de grade de libertate ale rigidului de la șase la trei, acestuia fiindu-i permise numai trei rotații față de trei axe concurente în O .

Pentru a studia forțele de legătură se consideră taylorul de reducere $\left(\vec{R}, \vec{M}_O \right)$ al

forțelor exterioare în O . Momentul \vec{M}_O tinde să rotească corpul și deoarece nu există frecare care să se opună acestei tendințe este necesar ca $\vec{M}_O = \vec{0}$ (deci și $\vec{M}'_O = \vec{0}$).

Rezultă că reacțiunea articulației va fi o forță \vec{R}' de modul și direcție oarecare (figura T6.2). Descompunând forța \vec{R}' după axele reperului cartezian $Oxyz$ în componentele R'_x, R'_y, R'_z rezultă ca o articulație sferică introduce trei necunoscute scalare (figura T6.3). Acest număr este egal cu numărul gradelor pierdute. Un simbol folosit pentru o articulație este ?? .

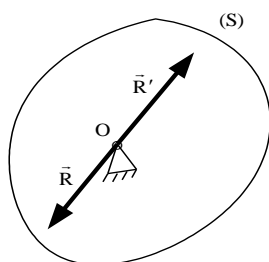


Figura T 6.2

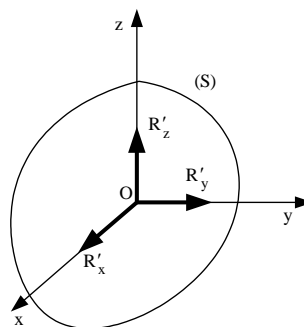


Figura T 6.3

b) Cazul articulației plane

Obligând punctul $O(x_O, y_O)$ să rămână fix se impun două condiții geometrice ($x_O, y_O = \text{constant}$) care reduc numărul de grade de libertate de la trei la unul, acestuia fiindu-i permisă doar o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul forțelor și care trece prin O . Și în acest caz articulația se înlocuiește cu o reacțiune \vec{R}' dar ea este situată

în planul forțelor și se descompune după direcțiile Ox și Oy în componentele R'_x și R'_y (figura T 6.4). Rezulta că o articulație plană introduce două necunoscute scalare (număr egal cu cel al gradelor de libertate pierdute).

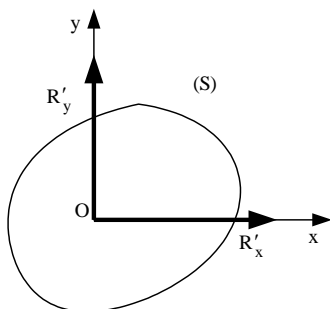


Figura T 6.4

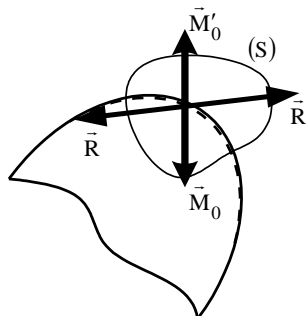


Figura T 6.5

6.3.3. Încăstrarea

Încăstrarea este legătura prin care un corp este fixat rigid (înțepenit) în alt corp astfel încât nu îi mai este permisă nici o mișcare.

Corpul nu mai are nici un grad de libertate. Din punct de vedere mecanic încăstrarea este echivalentă cu un torsor $\left(\vec{R}', \vec{M}_O' \right)$, unde O este centrul de greutate al secțiunii transversale în dreptul încăstrării (figura T 6.5). Cele două componente ale torsorului sunt vectori arbitrari $\left(\vec{R}' = -\vec{R}, \vec{M}_O' = -\vec{M}_O \right)$ și se pot descompune fiecare în trei componente pe axele unui reper cartezian Oxyz (figura T 6.6). O încăstrare introduce șase necunoscute scalare : $R'_x, R'_y, R'_z, M'_{Ox}, M'_{Oy}, M'_{Oz}$ (egal cu numărul de grade de libertate pierdute).

În cazul unui corp încăstrat acționat de forțe plane numărul de necunoscute scalare este trei : R'_x, R'_y, M'_{Oz} (figura T 6.7).

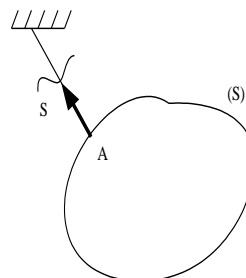
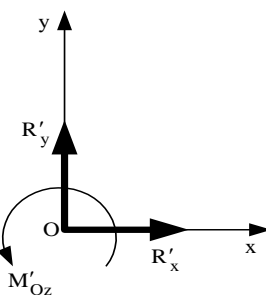
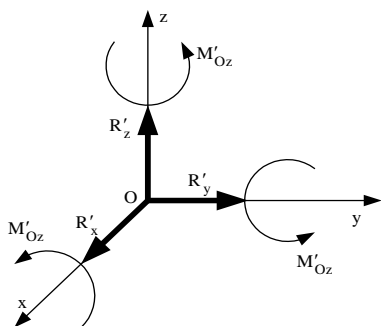


Figura T 6.6

Figura T 6.7

Figura T 6.8

6.3.4. Prinderea cu fire

Prinderea cu fire în cazul rigidului se tratează ca și în cazul punctului material, în sensul că această legătură se înlocuiește cu o forță care se introduce în lungul firului considerat secționat, în așa fel încât să întindă porțiunea de fir rămasă legată de rigid

(figura T 6.8). Forța \vec{S} se numește *tensiune în fir*.

6.4. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare

6.4.1. Tipuri de frecare. Ecuații de echilibru.

În subcapitolul 6.3 s-a discutat echilibrul rigidului cu legături ideale. În realitate, legăturile corpurilor sunt întotdeauna însoțite de frecare. Explicația fizică constă în faptul că în realitate corpurile sunt deformabile și vin în contact nu într-un singur punct O ci pe

o întreagă suprafață pe care forțele de legătură \vec{p}_i au o distribuție greu de stabilit (figura T6.9). Suprafețele de contact prezintă asperități care, sub acțiunea forțelor ce acționează asupra corpurilor, se întrepătrund și se deformează.

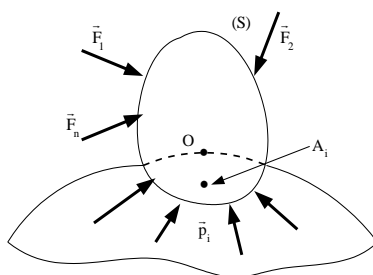


Figura T 6.9

Fie un solid rigid (S) acționat de forțele exterioare $\vec{F}_i, i = \overline{1, n}$. Torsorul forțelor exterioare în punctul teoretic de contact O (dacă corpurile nu s-ar deforma) este alcătuit din forța rezultantă \vec{R} și momentul rezultant \vec{M}_O . Torsorul în O al forțelor de legătură \vec{p}_i , aplicate în A_i , este:

$$\tau_O' \begin{cases} \vec{R}' = \sum \vec{p}_i \\ \vec{M}_O' = \sum \vec{OA}_i \times \vec{p}_i \end{cases}$$

Ecuatiile de echilibru sunt:

$$\vec{R} + \vec{R}' = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_O + \vec{M}_O' = \vec{0} \quad (6.9)$$

Fiecare din componentele torsorului de reducere din O al forțelor exterioare se descompune după normala în O la suprafața de contact și o dreaptă din planul tangent în O la suprafața (S_2) de reazem:

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t \quad , \quad \vec{M}'_O = \vec{M}_p + \vec{M}_t \quad (6.10)$$

În mod identic (figura T 6.10) se procedează cu elementele torsorului τ_O' al forțelor de legătură:

$$\vec{R}' = \vec{N} + \vec{T} \quad , \quad \vec{M}'_O = \vec{M}_p + \vec{M}_r \quad (6.11)$$

Ecuatiile de echilibru, proiectate pe direcția normalei și în planul tangent, se scriu:

$$\vec{R}_n + \vec{N} = \vec{0} \quad , \quad \vec{R}_t + \vec{T} = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_n + \vec{M}_p = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_t + \vec{M}_r = \vec{0} \quad (6.12)$$

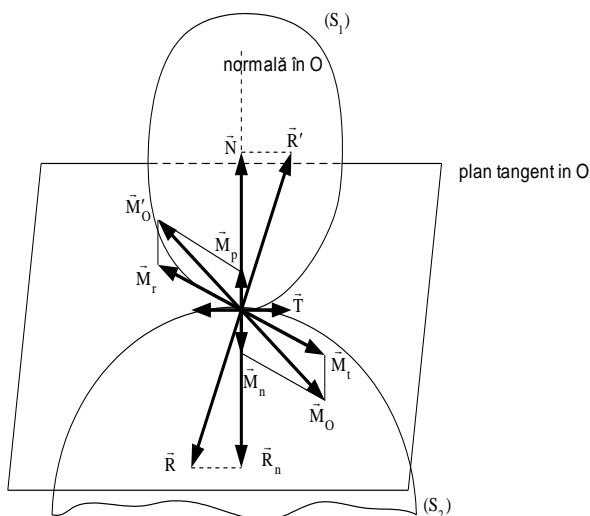


Figura T 6.10

Să analizăm rolul pe care-l îndeplinește fiecare componentă în parte:

- Forța \vec{R}_n tinde să deplaseze corpul în direcția normalei On la suprafața de reazem. Această deplasare este împiedicată de reacțiunea normală \vec{N} ;
- Forța \vec{R}_t tinde să deplaseze corpul în planul tangent în O la suprafața de reazem. Această deplasare se numește *alunecare* și ea este împiedicată de *forța de frecare de alunecare* \vec{T} ;
- Cuplul de moment \vec{M}_n are tendința de a roti corpul în jurul normalei On . Această mișcare se numește *pivotare* și ea este împiedicată de cuplul de moment \vec{M}_p , numit *cuplu de frecare de pivotare*;
- Cuplul de moment \vec{M}_t are tendința de a roti corpul în jurul unei axe din planul tangent la suprafața de contact. Această mișcare se numește *rostogolire* și ea este împiedicată de cuplul de moment \vec{M}_r , numit *cuplu de frecare de rostogolire*.

6.4.2. Frecarea de alunecare

Să considerăm un rigid acționat de un sistem de forțe exterioare al cărui torsor de reducere în raport cu punctul teoretic de contact cu suprafața de reazem este alcătuit doar din forța $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$ (figura T 6.11). Conform principiului acțiunii și reacțiunii forței \vec{R} i se opune reacțiunea $\vec{R}' = \vec{N} + \vec{T}$. Aceasta este înclinată cu unghiul α față de direcția normalei, unde α este dat de relația:

$$\left| \frac{\vec{T}}{\vec{N}} \right| = \left| \frac{\vec{R}_t}{\vec{R}_n} \right| \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

(6.13)

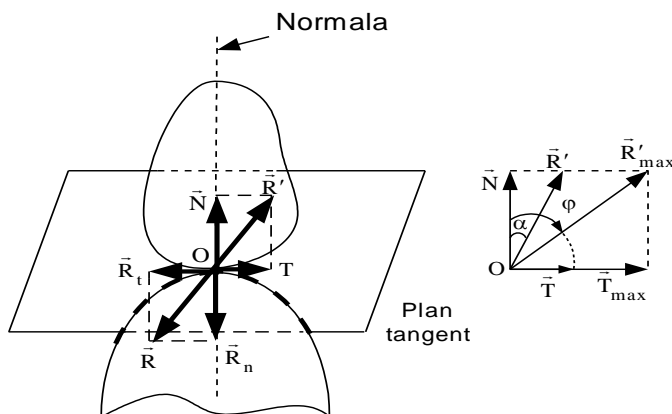


Figura T 6.11

În cazul echilibrului la limită unghiul α capătă valoarea maximă $\alpha_{\max} = \varphi$:

$$(6.14) \quad \left| \vec{T}_{\max} \right| = \left| \vec{N} \right| \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Notând $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, unde μ este *coeficientul de frecare de alunecare*, obținem:

$$(6.15) \quad \left| \vec{T} \right| \leq \left| \vec{T}_{\max} \right| = \mu \cdot \left| \vec{N} \right|$$

Legile frecării uscate (Coulomb) prezentate în cazul echilibrului punctului material cu frecare rămân valabile și în cazul de față ca și observațiile referitoare la coeficientul de frecare de alunecare μ .

6.4.3. Frecarea de rostogolire

Să considerăm un rigid în echilibru acționat de un sistem de forțe care are torsorul în O alcătuit din $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$ și $\vec{M}_O = \vec{M}_t$ (figura T 6.12). Conform principiului acțiunii și reacțiunii torsorul în același punct al forțelor de legătură este alcătuit din $\vec{R}' = \vec{N} + \vec{T}$ și $\vec{M}'_O = \vec{M}_r$. Momentul \vec{M}_t tinde să producă rostogolirea corpului și lui i se opune momentul de frecare de rostogolire \vec{M}_r . Această situație este întâlnită în practică în cazul roților de autovehicule, al bilelor sau rolelor de rulment.

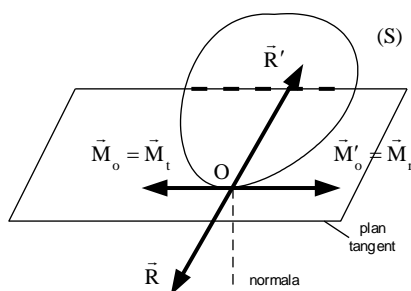


Figura T 6.12

Astfel, în figura T 6.13 a se consideră o roată acționată de forțele exterioare \vec{G} și \vec{F} . În figura T 6.13 b forțele \vec{G} și \vec{F} s-au înlocuit cu torsorul de reducere în raport cu punctul teoretic de contact O. Roata și calea de rulare fiind corpuri deformabile contactul va avea loc pe o suprafață și nu într-un punct. În fiecare punct de contact va apare o

reacțiune care se poate descompune după direcțiile normală și tangențială în \vec{n}_i și \vec{t}_i .
 Aceste componente se înlocuiesc cu rezultantele lor \vec{N} și \vec{T} .

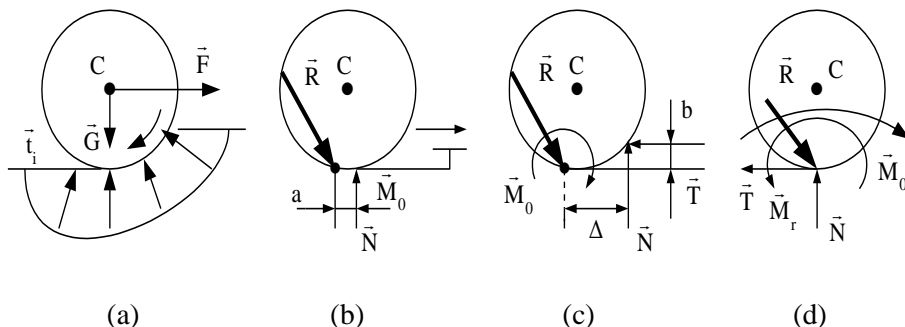


Figura T 6.13

Situația din figura T 6.13 b este determinată de faptul că zona de contact este asimetrică față de planul median, fiind mai mare în partea în care roata are tendința să se deplaseze. Pentru echilibrul la limită se obține situația din figura T 6.13 c. Distanța s , care reprezintă distanța maximă a cu care este deplasată reacțiunea normală \vec{N} față de verticala punctului O, se numește *coeficient de frecare de rostogolire*. Distanța b este neglijabilă. Făcând reducerea sistemului de forțe \vec{N} și \vec{T} în raport cu punctul O se obține situația din figura 6.13 d. În concluzie, apar ca reacțiuni forțele \vec{N} și \vec{T} și momentul de frecare de rostogolire \vec{M}_r , opus tendinței de rostogolire și de modul:

$$|\vec{M}_r| \leq |\vec{M}_{r,\max}| = s \cdot |\vec{N}| \quad (6.16)$$

Coeficientul s se exprimă în metri iar valoarea sa (determinată experimental) depinde de raza roții și de natura materialelor din care sunt confecționate roțile

6.4.4. Frecarea de pivotare

Să considerăm un rigid aflat în echilibru pe o suprafață și acționat de un sistem de forțe exterioare al cărui tursor în raport cu punctul $O \in (S)$ este $\vec{R} = \vec{R}_n$ și $\vec{M}_O = \vec{M}_n$.

Torsorul în același punct al forțelor de legătură este format din $\vec{R}' = \vec{N}$ și $\vec{M}'_O = \vec{M}_p$ (figura T 6.14). Echilibrul impune ca:

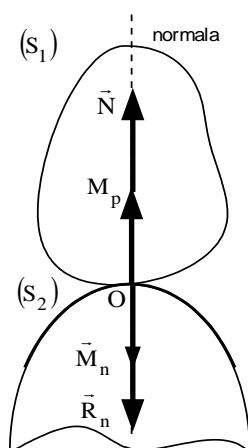


Figura T 6.14

$$(6.17) \quad \vec{R}_n + \vec{N} = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_n + \vec{M}_p = \vec{0}$$

Experiența arată că \vec{M}_p , denumit *moment de frecare de pivotare*, nu poate depăși o anumită limită, respectiv valoarea maximă a momentului de frecare de pivotare este dată de:

$$(6.18) \quad \left| \vec{M}_{p, \max} \right| = \mu k \left| \vec{N} \right|$$

unde μ este coeficientul (adimensional) de frecare de alunecare iar k este un factor ce depinde de forma suprafețelor aflate în contact (are dimensiunile unei lungimi).

În concluzie, *tendinței de pivotare i se opune un cuplu de frecare de pivotare care variază de la zero la o valoare maximă egală cu produsul dintre un coeficient de frecare de alunecare μ (stabilit experimental), un factor unidimensional k , depinzând de forma și de dimensiunile suprafețelor în contact și modulul reacțiunii normale:*

$$\left| \vec{M}_p \right| \leq \left| \vec{M}_{p,\max} \right| = \mu k \left| \vec{N} \right|$$

(6.19)

6.4.5. Frecarea în articulații și lagăre

În afara frecărilor prezentate, care se refereau la reazemul simplu, în tehnică se întâlnesc și alte cazuri importante în care intervine frecarea. Două dintre aceste situații vor fi prezentate în cele ce urmează.

Roțile unei mașini sunt fixate pe *arbori* sau *osii*, care la rândul lor se reazemă pe *lagăre* (figura T 6.15). Porțiunile din arborii sau osii care vin în contact cu lagărele se numesc *fusuri*. În timpul rotației arborelui între fus și lagăr are loc o alunecare sau o rostogolire însoțită de frecare.

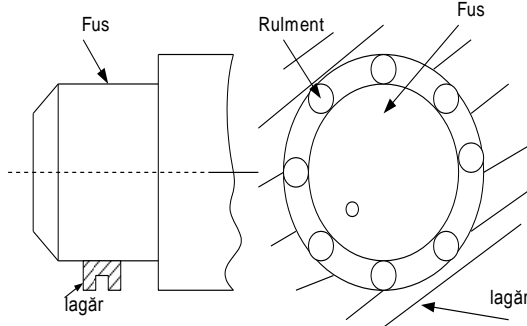


Figura T 6.15

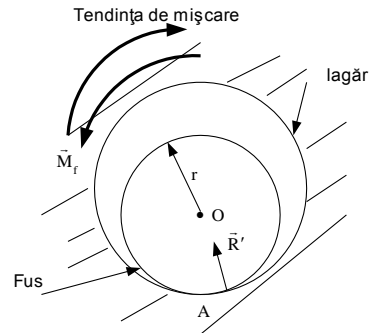


Figura T 6.16

Frecarea în lagăr se manifestă printr-un cuplu de frecare. Experiența arată că acest moment, notat \vec{M}_f , și numit *moment de frecare din lagăr* (din *articulație*) nu poate depăși o anumită limită, respectiv valoarea maximă a momentului de frecare din lagăr este dată de:

$$\left| \vec{M}_{f,\max} \right| = \mu' r \left| \vec{R}' \right|$$

(6.20)

unde μ' este coeficientul (adimensional) de frecare din lagăr, r este raza fusului iar $\left| \vec{R}' \right|$

este modulul reacțiunii din articulație.

În concluzie, într-un lagăr sau într-o articulație (figura 6.16) apare un cuplu de frecare, opus tendinței de rotație, de moment ce variază de la zero la o valoare maximă egală cu produsul dintre un coeficient de frecare în lagăr μ' , raza fusului r și modulul reacțiunii:

$$\left| \vec{M}_f \right| \leq \left| \vec{M}_{f, \max} \right| = \mu' r \left| \vec{R}' \right|$$

(6.21)

Coeficientul de frecare μ' , care se determină experimental, depinde de natura suprafețelor de contact, de forma și dimensiunile lagărului precum și de modul de repartitie al reacțiunilor elementare pe suprafața de contact. Modulul reacțiunii \vec{R}' are expresia:

- $\left| \vec{R}' \right| = \sqrt{\left(R'_x \right)^2 + \left(R'_y \right)^2}$ - pentru articulația cilindrică;
- $\left| \vec{R}' \right| = \sqrt{\left(R'_x \right)^2 + \left(R'_y \right)^2 + \left(R'_z \right)^2}$ - pentru articulația sferică.

În figurile T 6.15 a, b sunt date exemple de lagăre de alunecare și de rostogolire.

6.4.6. Frecarea firelor

Să considerăm o roată pe care este înfășurat un fir. Dacă roata este fixă și firul are tendința de mișcare sau dacă firul este fix și roata are tendința de mișcare, atunci între fir și roată apare frecare (figura T 6.17). Notând cu μ coeficientul de frecare, cu θ unghiul de înfășurare a firului pe roată și cu T_1 și T_2 tensiunile în fire de o parte și de alta a roții, atunci condiția de echilibru se scrie:

$$e^{-\mu\theta} \leq \frac{T_1}{T_2} \leq e^{\mu\theta}$$

(6.20)

Relația (6.20) poartă numele de **formula lui Euler pentru frecarea firelor**.

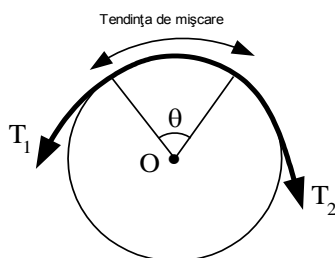


Figura T 6.17

6.5. Probleme rezolvate

R 6.1. Se consideră bara omogenă AB, de greutate G și lungime l , simplu rezemată în B pe un plan înclinat cu unghiul β față de orizontală și articulată în A (fără frecare). Direcția barei formează unghiul α cu orizontală (figura R 6.1.1) Un fir inextensibil,

trecut peste scripetele fix fără frecare din D , unește punctul C al barei cu o greutate Q (AC = a , γ dat). Dacă bara este solicitată de un cuplu de forțe de moment M , se cere :

- Reacțiunile din A și B ;
- Valoarea momentului M pentru care bara rămâne în echilibru în poziția dată dacă lipsește reazemul din B .

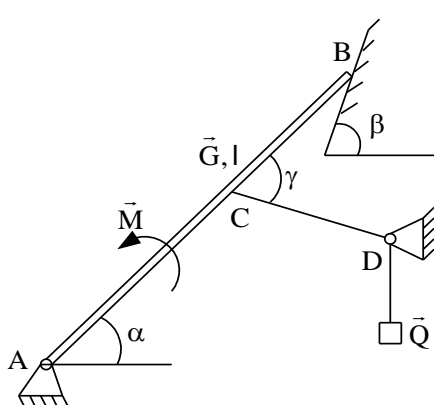


Figura R 6.1.1

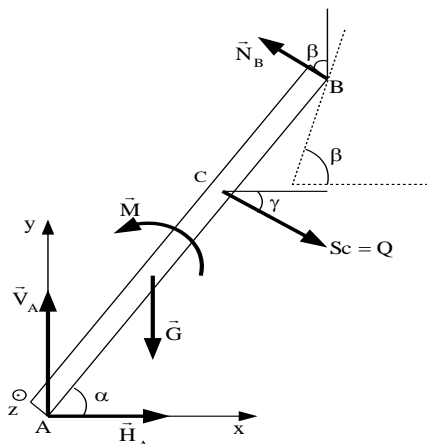


Figura R 6.1.2

Rezolvare: a) Se eliberează bara de legăturile sale (articulația din A, firul din C și reazemul simplu din B) și se introduc reacțiunile corespunzătoare (vezi figura R 6.1.2).

Deoarece $S_C = Q$, necunoscutele problemei sunt $\vec{R}_A(H_A, V_A), \vec{R}_B(N_B)$. Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$\sum X_i = H_A + Q \cos(\gamma - \alpha) - N_B \sin \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_i = V_A - G - Q \sin(\gamma - \alpha) + N_B \cos \beta = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = M - G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - Q \cdot a \sin \gamma + N_B \cdot l \cos(\beta - \alpha) = 0 \quad (3)$$

Din ecuațiile (1-3) se obțin reacțiunile:

$$N_B = \frac{1}{\cos(\beta - \alpha)} \left(Q \cdot \frac{a}{l} \sin \gamma + \frac{G}{2} \cos \alpha - \frac{M}{l} \right)$$

$$H_A = N_B \sin \beta - Q \cos(\gamma - \alpha), \quad V_A = G + Q \sin(\gamma - \alpha) - N_B \cos \beta$$

b) Absența reazemului din B conduce la:

$$N_B = 0 \Rightarrow M = G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha + Q \cdot a \sin \gamma.$$

R 6.2. Bara cotită OABC, de greutate neglijabilă, este încastrată în O și este solicitată de :

- o sarcină uniform distribuită, de intensitate q (N / m), aflată în planul yOz ;
- o sarcină distribuită , ce scade liniar de la p (N / m) la 0 , aflată într-un plan paralel cu yOz ;

- o sarcină punctuală F (N), aflată într-un plan paralel cu xOz , ce face unghiul α cu Oz .

Dimensiunile barei fiind cele din figura R 6.2.1, să se determine reacțiunile din încastrarea O .

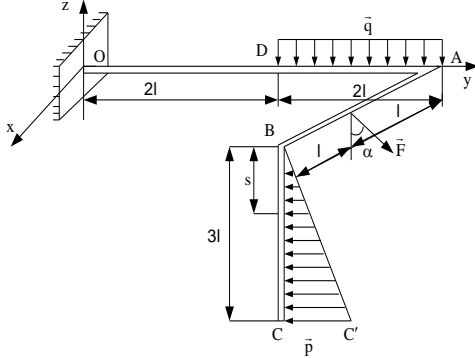


Figura R 6.2.1.

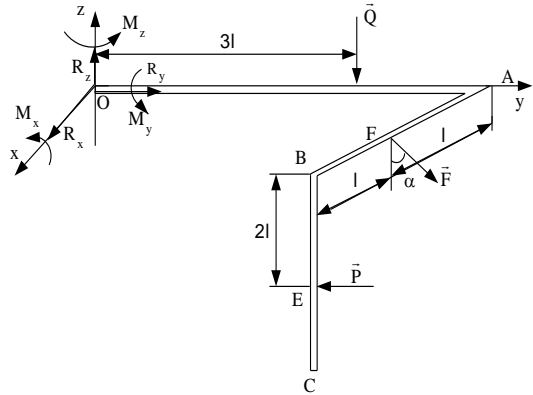


Figura R 6.2.2.

Rezolvare: Forțele uniform distribuite formează un sistem de forțe paralele și se înlocuiesc cu rezultanta lor $Q = 2ql$, cu punctul de aplicație în mijlocul segmentului AD (figura R 6.2.2). Forțele liniar distribuite formează și ele un sistem de forțe paralele și se înlocuiesc cu rezultanta $P = \int_0^{3l} p(s) ds = \frac{3pl}{2}$ (aria triunghiului BCC'), cu punctul de aplicație în centrul forțelor paralele aflat pe BC la distanța :

$$BE = \frac{\int_0^{3l} s \cdot p(s) ds}{\int_0^{3l} p(s) ds} = 2l.$$

Eliberând corpul de legătura sa (încastrarea din O) și introducând componentele reacțiunii din încastrare (R_x, R_y, R_z) și ale momentului din încastrare (M_x, M_y, M_z) , se pot scrie următoarele șase ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= R_x - F \sin \alpha = 0 & \sum M_{ix} &= M_x - Q \cdot 3l - F \cos \alpha \cdot 4l - P \cdot 2l = 0 \\ \sum Y_i &= R_y - P = 0 & \sum M_{iy} &= M_y + F \cos \alpha \cdot l = 0 \\ \sum Z_i &= R_z - Q - F \cos \alpha = 0 & \sum M_{iz} &= M_z + F \sin \alpha \cdot 4l - P \cdot 2l = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem obținem:

$$\begin{aligned} R_x &= F \sin \alpha & M_x &= 6ql^2 + 3pl^2 + 4Fl \cos \alpha \\ R_y &= \frac{3pl}{2} & M_y &= -Fl \cos \alpha \\ R_z &= 2ql + F \cos \alpha & M_z &= 3pl^2 - 4Fl \sin \alpha. \end{aligned}$$

R 6.3. Placa dreptunghiulara ABCD se sprijină în A pe un plan orizontal și în B pe un plan înclinat (figura R 6.3.1). Cunoscând lungimile laturilor dreptunghiului $AB = b$ și $AD = a$, coeficientul de frecare de alunecare μ din A și B și unghiul α de înclinare, să



se determine poziția de echilibru dată prin unghiul θ . Să se particularizeze rezultatul găsit pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ și $\frac{a}{b} \rightarrow 0$ (cazul barei ce se sprijină pe doi pereți perpendiculari).

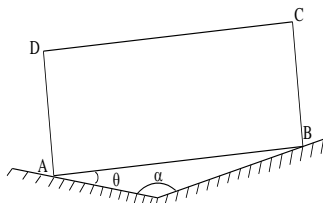


Figura R 6.3.1

Figura R 6.3.2

Rezolvare: Se eliberează corpul de legăturile sale (rezemele cu frecare din A și B) și se introduc reacțiunile corespunzătoare $\vec{R}_A(N_A, T_A)$, $\vec{R}_B(N_B, T_B)$ (figura R 6.3.2). Ecuatiile de echilibru și condițiile de echilibru (la limită) asociate frecărilor din A și B sunt:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= T_A + T_B \cos(\pi - \alpha) - N_B \sin(\pi - \alpha) = 0 \\ \sum Y_i &= N_A - G + T_B \sin(\pi - \alpha) + N_B \cos(\pi - \alpha) = 0 \\ \sum M_{iA} &= -G \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cos(\beta + \theta) + T_B \cdot b \sin(\alpha + \theta) - N_B \cdot b \cos(\alpha + \theta) = 0 \\ T_A &= \mu N_A, \quad T_B = \mu N_B.\end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$\begin{aligned}N_A &= \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{(\mu^2 + 1) \sin \alpha} G, \quad N_B = \frac{\mu}{(\mu^2 + 1) \sin \alpha} G, \quad T_A = \mu N_A, \quad T_B = \mu N_B, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{1 + \frac{2\mu}{\mu^2 + 1} (\operatorname{ctg} \alpha - \mu)}{\frac{a}{b} + \frac{2\mu}{\mu^2 + 1} (\mu \operatorname{ctg} \alpha + 1)}.\end{aligned}$$

Observație: Dacă $\frac{a}{b} \rightarrow 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$ (cazul barei rezemate cu frecare între doi pereți

perpendiculari), atunci echilibrul se realizează pentru $\operatorname{tg} \theta = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}$.

R 6.4. Sistemul din figura R 6.4.1 este format dintr-un disc omogen de greutate G și rază R , care se sprijină pe o bară orizontală de greutate neglijabilă care este articulată în A și rezemată în B, și un corp de greutate P aflat pe un plan neted și înclinat cu unghiul α față de orizontală. Știind că $AC = CB = l, R = l/3, G = 1000 \text{ N}, \alpha = 30^\circ$ și că în C există frecare atât de alunecare cât și de rostogolire de coeficienți $\mu = 0.1$ și $s = 0.15 R$, se cer :

- a) Valorile forței P pentru echilibru ;
b) Reacțiunile în A și B pentru $P = P_{\max}$.

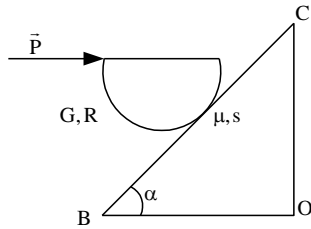


Figura R 6.4.1

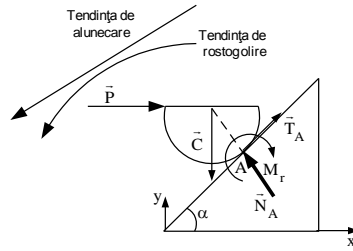


Figura R 6.4.2

Rezolvare: Sub acțiunea forțelor \vec{G} și \vec{F} semidiscul poate aluneca, respectiv rostogoli, în sensul precizat în figura R 6.4.2. sau în sens contrar. Eliberând corpul de reazemul cu frecare din A și introducând reacțiunile corespunzătoare (reacțiunea normală \vec{N}_A , forța de frecare de alunecare \vec{T}_A și momentul de frecare de rostogolire \vec{M}_r), se scriu următoarele ecuații și condiții de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= P + T_A \cos \alpha - N_A \sin \alpha = 0 \\ \sum Y_i &= -G + T_A \sin \alpha + N_A \cos \alpha = 0 \\ \sum M_{iA} &= -M_r + G \cdot R \sin \alpha - P \cdot R \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Condiția de nealunecare:} & \quad T_A \leq \mu N_A \\ \text{Condiția de nerostogolire:} & \quad M_r \leq s N_A \end{aligned}$$

Din (1 – 5) găsim că:

$$P_{\min} = \max \left\{ \frac{\tan \alpha - \mu}{\mu \tan \alpha + 1} G, \frac{\tan \alpha - \frac{s}{R}}{\frac{s}{R} \tan \alpha + 1} G \right\}$$

Studiind cazul tendințelor opuse de alunecare, respectiv rostogolire, găsim o valoare maximă pentru forța P în cazul echilibrului:

$$P_{\max} = \min \left\{ \frac{tg \alpha + \mu}{-\mu tg \alpha + 1} G, \frac{tg \alpha + \frac{s}{R}}{-\frac{s}{R} tg \alpha + 1} G \right\}$$

(7)

Pentru ca semidiscul să rămână în echilibru în poziția din figura R 6.4.2. trebuie ca $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$.

Caz particular: În cazul valorilor particulare propuse pentru parametrii problemei obținem că:

$$\begin{array}{ll} \frac{tg \alpha - \mu}{\mu tg \alpha + 1} G = 33,77 N & \frac{tg \alpha + \mu}{-\mu tg \alpha + 1} G = 87,79 N \\ \frac{tg \alpha - \frac{s}{R}}{\frac{s}{R} tg \alpha + 1} G = 45,07 N & \frac{tg \alpha + \frac{s}{R}}{-\frac{s}{R} tg \alpha + 1} G = 70,18 N. \end{array}$$

Sunt posibile următoarele situații:

- $P \in [0; 33,77 N)$ - corpul alunecă spre B și se rostogolește în sens trigonometric;
- $P \in [33,77 N; 45,07 N)$ - corpul se rostogolește în sens trigonometric fără a aluneca;
- $P \in [45,07 N; 70,18 N]$ - corpul se afla în echilibru;
- $P \in (70,18 N; 87,79 N]$ - corpul se rostogolește în sens orar fără a aluneca;
- $P \in (87,79 N; \infty)$ - corpul alunecă spre C și se rostogolește în sens orar.

6.5. Placa omogenă din figura R.6.5.1 are o articulație în O caracterizată prin coeficientul de frecare μ_0 și raza fusului articulației r_0 . Să se determine valorile coeficientului de frecare pentru ca placa să rămână în echilibru în poziția din figură.

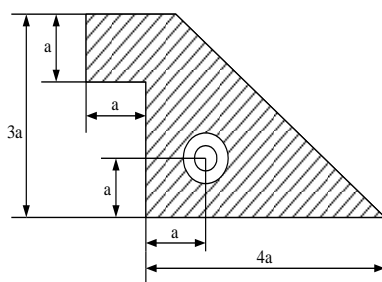


Figura R 6.5.1

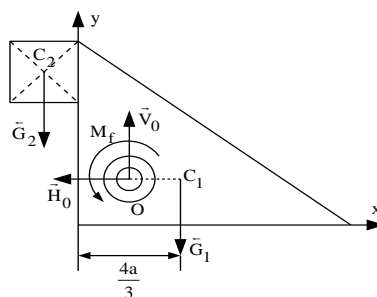


Figura R 6.5.2

Rezolvare: Eliberăm corpul de legătura sa (articulația cu frecare din O) și introducem reacțiunile corespunzătoare (componentele H_O, V_O ale reacțiunii din articulație și momentul de frecare din articulație M_f). Pentru a nu determina centrul de

masă al plăcii se împarte aceasta în două (suprafața triunghiulară și suprafața pătratică) și se introduc greutatea \vec{G}_1 și \vec{G}_2 în centrele lor de masă C_1, C_2 (figura R 6.5.2). Considerăm în cele ce urmează tendința de rotire a plăcii în sens orar. Ecuațiile de echilibru și condiția de echilibru asociată acestui tip de frecare sunt:

$$\sum X_i = -H_O = 0$$

(1)

$$\sum Y_i = V_O - G_1 - G_2 = 0$$

(2)

$$\sum M_{iO} = M_f + G_2 \cdot \frac{3a}{2} - G_1 \cdot \frac{a}{3} = 0$$

(3)

$$M_f \leq \mu_0 r_0 \sqrt{H_O^2 + V_O^2}$$

(4)

Considerând că densitatea superficială este ρ , putem scrie :

$$G_1 = M_1 g = A_1 \rho g = 6\rho a^2 g, \quad G_2 = M_2 g = A_2 \rho g = \rho a^2 g$$

(5)

$$\text{Din (1 - 5) se obține } \mu_0 \geq \frac{a}{14r_0}.$$

Observație: Studiul tendinței de rotire în sens trigonometric ne arată că placa rămâne în echilibru indiferent de valorile coeficientului de frecare μ_0 .

R 6.6. Un cablu, trecut peste doi tamburi fiși, are la capete două greutăți P și Q (figura R 6.6.1). Cunoscând coeficienții de frecare între cablu și cei doi tamburi, μ_1 și μ_2 , se cere raportul greutăților P și Q pentru echilibru.

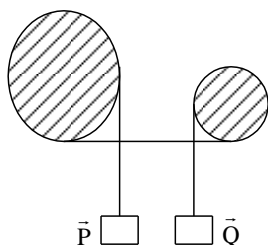


Figura R 6.6.1

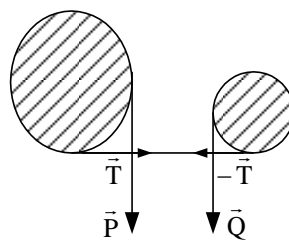


Figura R 6.6.2

Rezolvare: Secționăm cablul în porțiunea dintre tamburi și introducem tensiunea în cablu, T (figura R 6.6.2). Condițiile ca cele două bucăți de cablu să nu se deplaseze pe cei doi tamburi se scriu sub forma:

$$\exp\left(-\mu_1 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{Q}{T} \leq \exp\left(\mu_1 \cdot \frac{3\pi}{2}\right), \quad \exp\left(-\mu_2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{T}{P} \leq \exp\left(\mu_2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right)$$

Înmulțind membru cu membru cele două duble inegalități obținem valorile pe care le poate lua raportul Q / P la echilibru:

$$\exp\left(-(\mu_1 + \mu_2) \cdot \frac{3\pi}{2}\right) \leq \frac{Q}{P} \leq \exp\left((\mu_1 + \mu_2) \cdot \frac{3\pi}{2}\right).$$

6.6. Probleme propuse

6.6.1. Teste clasice

TC 6.1) Se consideră bara omogenă AB de greutate G și lungime l , simplu rezemată fără frecare în punctele A și D pe o suprafață semicilindrică de rază $R = \frac{l}{2}$ (figura TC 6.1.1). Să se determine reacțiunile în A și D și poziția de echilibru dată prin unghiul θ .

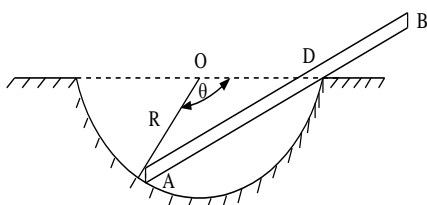


Figura TC 6.1.1

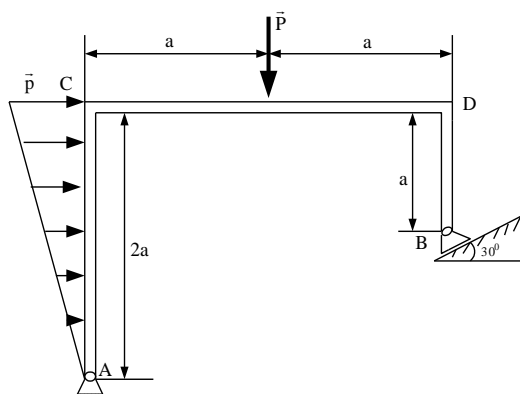


Figura TC 6.2.1

TC 6.2) Se consideră bara din figura TC 6.2.1, articulată în A și simplu rezemată în B. Ea este acționată pe latura AC de forța liniar distribuită de intensitate maximă p (N/m) și de forța concentrată P (N) în punctul E. Dimensiunile barei fiind cele din figură, să se determine reacțiunile din articulația A și reazemul B.

TC 6.3) Paralelipipedul dreptunghic omogen din figura TC 6.3.1., cu latura bazei a și înălțimea b se sprijină pe un plan înclinat al cărui unghi α poate fi modificat, coeficientul de frecare de alunecare dintre paralelipiped și plan fiind μ . Să se determine unghiul α în cazul echilibrului.

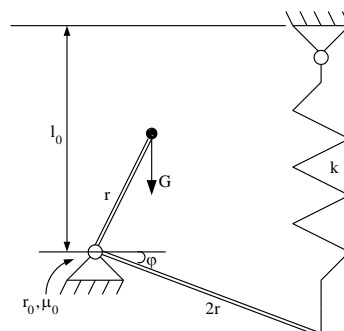
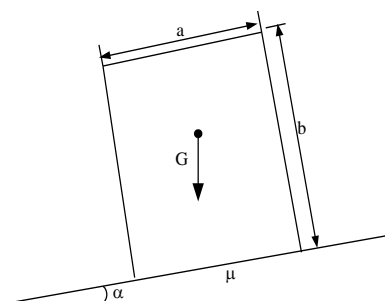


Figura TC 6.3.1

Figura TC 6.4.1

TC 6.4) O bară cotită, de greutate neglijabilă, este prinsă la un capăt de un resort elastic de constantă elastică k și lungime inițială l_0 iar la celălalt capăt are montată o bilă de greutate G (figura TC 6.4.1). Bara este articulată cu frecare în punctul O. Cunoscând poziția de echilibru dată prin unghiul φ , raza articulației r_0 și coeficientul de frecare în articulație μ_0 , să se determine valorile greutății G în cazul echilibrului.

6.6.2. Teste grilă

TG 6.1) Placa omogenă din figura TG 6.1 este alcătuită dintr-o parte mărginită de un semicerc de rază R care se continuă cu o parte în formă de triunghi isoscel cu baza $2R$ și înălțimea h . Să se determine relația dintre înălțimea h și raza R astfel ca placa să stea în echilibru pe un plan orizontal pentru o înclinare oarecare a sa.

a) $R = \sqrt{2} h$; b) $R = h$; c) $h = \sqrt{2} R$; d) $h = 2R$.

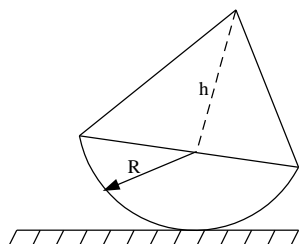


Figura TG 6.1

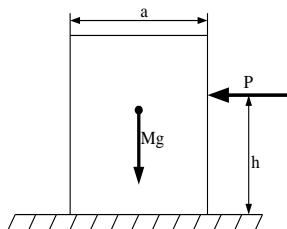


Figura TG 6.2

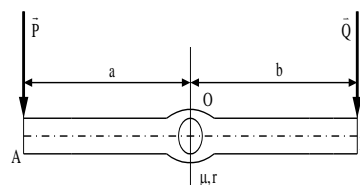


Figura TG 6.3

TG 6.2) O cutie de masă $M = 75 \text{ kg}$ și latură $a = 0,6 \text{ m}$ se găsește în repaus pe o suprafață aspră (figura TG 6.2). Contactul între cutie și suprafață este caracterizat de coeficientul de frecare de alunecare $\mu = 0,2$. Care este valoarea maximă a forței P care acționează asupra cutiei și care este înălțimea maximă h la care aceasta se poate aplica pentru a nu produce răsturnarea sau alunecarea cutiei pe podea? Se consideră $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

a) $P_{\max} = 147,15 \text{ N}$, $h_{\max} = 1,5 \text{ m}$; b) $P_{\max} = 125,28 \text{ N}$, $h_{\max} = 1,2 \text{ m}$;
c) $P_{\max} = 140,31 \text{ N}$, $h_{\max} = 2 \text{ m}$; d) $P_{\max} = 240,75 \text{ N}$, $h_{\max} = 1,8 \text{ m}$.

TG 6.3) Bara orizontală AB din figura TG 6.3 are o articulație în O caracterizată prin coeficientul de frecare μ și raza fusului articulației r . Ea este acționată de forțele verticale P și Q , aflate la distanțele a și b , respectiv, de articulația O. Precizați domeniul de valori pe care îl poate lua raportul P/Q pentru realizarea echilibrului în poziția din figură.

a) $\frac{P}{Q} \in \left[\frac{b - \mu r}{a + \mu r}, \frac{b + \mu r}{a - \mu r} \right]$; b) $\frac{P}{Q} \in \left[\frac{a + \mu r}{b - \mu r}, \frac{a - \mu r}{b + \mu r} \right]$;

$$c) \frac{P}{Q} \in \left[\frac{r - \mu b}{r + \mu b}, \frac{r + \mu a}{r - \mu a} \right] ; \quad d) \frac{P}{Q} \in (0, \infty).$$

6.7. Indicații și răspunsuri

TC 6.1) Se eliberează bara de legăturile sale (reazemele fără frecare din A și D) și se introduc reacțiunile normale \vec{N}_A și \vec{N}_D (figura TC 6.1.2). Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= N_A \cos(\pi - \theta) - N_D \sin \frac{\pi - \theta}{2} = 0 \\ \sum Y_i &= N_A \sin(\pi - \theta) - G + N_D \cos \frac{\pi - \theta}{2} = 0 \\ \sum M_{iA} &= N_D \cdot 2R \sin \frac{\theta}{2} - G \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\pi - \theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem găsim:

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \quad N_A = \frac{G}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \theta} = 0,447G, \quad N_D = \frac{G}{2}.$$

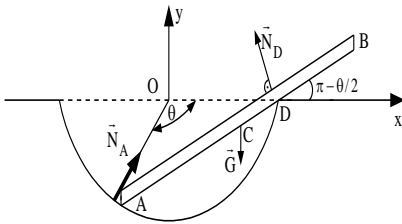


Figura TC 6.1.2

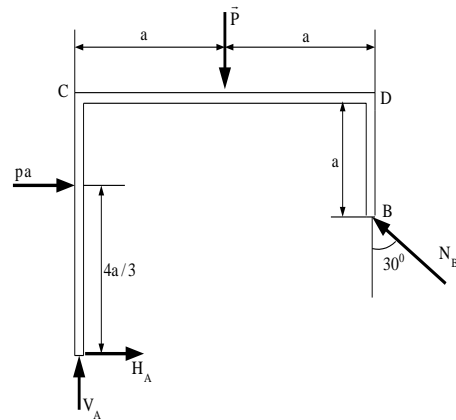


Figura TC 6.2.2

TC 6.2) Forța distribuită liniar se înlocuiește cu rezultanta $R = pa$ plasată pe bara AC la distanța $2a / 3$ de punctul C (figura TC 6.2.2). Se introduc reacțiunile $\vec{R}_A(H_A, V_A)$ și $\vec{R}_B(N_B)$ și se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= H_A - N_B \sin 30^\circ + pa = 0 \\ \sum Y_i &= V_A + N_B \cos 30^\circ - P = 0 \end{aligned}$$

$$\sum M_{iA} = N_B \sin 30^0 \cdot a + N_B \cos 30^0 \cdot a - P \cdot 2a - pa \cdot \frac{4a}{3} = 0.$$

Necunoscutele acestui sistem sunt H_A, V_A și N_B .

TC 6.3) Reacțiunea normală din partea planului își deplasează punctul de aplicație odată cu creșterea unghiului planului. La limita echilibrului, care se poate pierde prin răsturnare, reacțiunea se aplică în poziția extremă A a bazei (figura TC 6.3.2). Reducerea forțelor de legătură în centrul O al bazei impune introducerea momentului de frecare de rostogolire M_r . Ecuațiile și condițiile de echilibru se scriu:

$$\sum X_i = T - G \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y_i = N - G \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_{iO} = M_r - G \cdot \frac{b}{2} \sin \alpha = 0$$

$$T \leq \mu N, \quad M_r \leq s N.$$

Coeficientul de frecare de rostogolire s reprezintă deplasarea maximă pe care o poate avea reacțiunea normală N , adică $s = \frac{a}{2}$. Rezolvând setul de condiții de mai sus se obține

$$\alpha \leq \min(\arctg \mu, \arctg \frac{a}{b}).$$

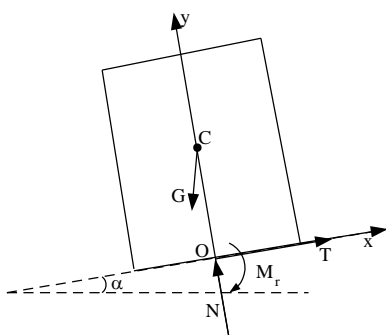


Figura TC 6.3.2

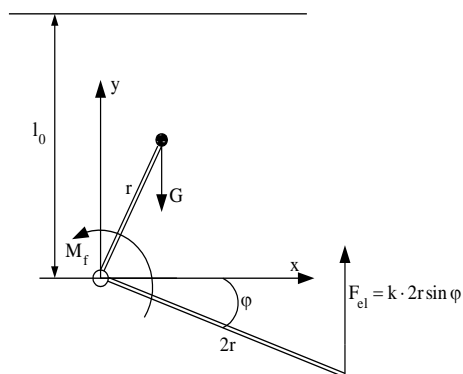


Figura TC 6.4.2

TC 6.4) Forța elastică ce se dezvoltă în resort este $F_{el} = k \cdot 2r \sin \varphi$ iar articulația cu frecare din O se înlocuiește cu reacțiunea $\vec{R}_O (H_O, V_O)$ și momentul de frecare M_f (figura TC 6.4.2). Considerând tendința de rotire a barei în sens orar, ecuațiile de echilibru sunt:

$$\sum X_i = H_O = 0$$

$$\sum Y_i = V_O - G + F_{el} = 0$$

$$\sum M_{iO} = M_f + F_{el} \cdot 2r \cos \varphi - G \cdot r \sin \varphi = 0$$

$$M_f \leq \mu_0 r_0 \sqrt{H_O^2 + V_O^2}$$

Considerând și cealaltă tendință de mișcare se găsește că:

$$\frac{2rk \sin \varphi (2r \cos \varphi + \mu_0 r_0)}{r \sin \varphi + \mu_0 r_0} \leq G \leq \frac{2rk \sin \varphi (2r \cos \varphi - \mu_0 r_0)}{r \sin \varphi - \mu_0 r_0}.$$

TG 6.1) Se pune condiția ca momentul resultant al forțelor de greutate să fie nul:

$$G_1 \cdot \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = G_2 \cdot \frac{h}{3}.$$

Răspuns corect: **c)**

TG 6.2) Se scriu ecuațiile de echilibru:

$$N = G = Mg, P = T \leq \mu N = P_{\max}, P \cdot h_{\max} = Mg \cdot \frac{a}{2}.$$

Răspuns corect : **b).**

TG 6.3) Pentru tendința de rotire în sens trigonometric ecuațiile de echilibru și condiția de echilibru se scriu:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= H_O = 0 \\ \sum Y_i &= V_O - P - Q = 0 \\ \sum M_{iO} &= Q \cdot b - P \cdot a + M_f = 0 \\ M_f &\leq \mu r \sqrt{H_O^2 + V_O^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect : **a).**

7. Echilibrul sistemelor de puncte materiale și de solide rigide

7.1. Condiții de echilibru ale unui sistem de forțe ce acționează asupra unui sistem de puncte materiale

O mulțime de n puncte materiale, legate într-un anumit mod între ele, formează un sistem. Forțele care acționează asupra punctului material $A_i, i = \overline{1, n}$, sunt de două feluri:

- forțe exterioare, a căror rezultantă o vom nota cu \vec{F}_i (figura T 7.1);
- forțe interioare, notate $\vec{F}_{ij}, j = \overline{1, n}, j \neq i$.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii forțele interioare sunt două câte două egale și direct opuse:

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}, i, j = \overline{1, n}, j \neq i$$

(7.1)

În plus, momentul față de un punct arbitrar O al oricărei perechi de forțe interioare $\vec{F}_{ij}, \vec{F}_{ji}$ este nul:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ij} =$$

(7.2)

$$= \vec{A_i A_j} \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}, \text{ deoarece } \vec{A_i A_j} // \vec{F}_{ij}.$$

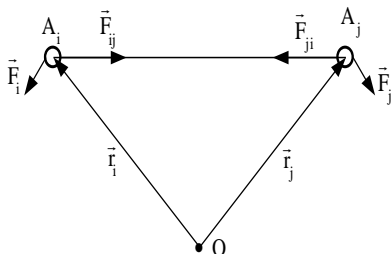


Figura T 7.1

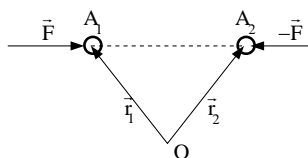


Figura T 7.2

Prin definiție, un sistem de puncte materiale este în echilibru dacă fiecare punct din sistem se află în echilibru și reciproc.

Condiția necesară și suficientă ca un punct $A_i, i = \overline{1, n}$, din sistem să fie în echilibru este:

$$\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = \vec{0}, i = \overline{1, n}$$

(7.3)

Însumând ecuațiile (7.3) se găsește că:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

(7.4)

Înmulțind vectorial relațiile (7.3) cu vectorii $\vec{r}_i, i = \overline{1, n}$, la stânga, se obțin și ecuațiile:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}, i = \overline{1, n}$$

(7.5)

care, prin adunare, conduc la:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

(7.6)

Conform relațiilor (7.1 – 7.2) avem că $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$,

astfel că, din (7.4) și (7.6), obținem următoarele *condiții necesare de echilibru* pentru un sistem de puncte materiale:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad , \quad \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

(7.7)

Aceste condiții nu sunt însă și *suficiente* pentru echilibrul unui sistem de puncte materiale deoarece ele nu asigură că fiecare punct al sistemului este în echilibru. Astfel, considerând un sistem de două puncte materiale A_1 și A_2 , acționat de forțele coliniare \vec{F} și $-\vec{F}$ (figura T 7.2), cu toate că relațiile (7.7) sunt verificate, punctele nu vor fi în echilibru ci se vor apropia unul de altul.

Pentru un solid rigid, condițiile (7.7) sunt *condiții necesare și suficiente de echilibru*.

7.2. Teoreme și metode pentru rezolvarea problemelor de statica sistemelor

Condițiile (7.7) reprezintă forma matematică a *teoremei solidificării* al căruia enunț este:

Teorema solidificării: *Un sistem de puncte (sau de rigide) deformabil, care se află în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe oarecare, continuă să rămână în repaus dacă este rigidizat prin introducerea unor legături interioare suplimentare.*

Dacă se consideră doar o parte din ecuațiile (7.3) și (7.5) și anume acelea care exprimă condițiile de echilibru pentru punctele ce alcătuiesc un sistem izolat din sistemul de puncte inițial, procedând la fel ca mai sus se obțin condiții similare celor exprimate de (7.7), cu observația că sumele se consideră numai pentru punctele subsistemului. Se obține astfel *teorema echilibrului părților*, care se enunță astfel:

Teorema echilibrului părților: *Dacă un sistem de puncte (sau de rigide) deformabil se află în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci o parte oarecare din sistem considerată ca rigid este de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor care corespund acestei părți.*

Folosind această teoremă se poate observa că pentru a rezolva o problemă de echilibru sistemelor de corpuri putem considera echilibrul fiecărui corp în parte. Se ajunge astfel la **metoda izolării corpurilor**.

Fiecare corp izolat va fi acționat de *forțele exterioare date* (active), de *forțele exterioare de legătură* (necunoscute) din legăturile corpului cu corpurile din afara sistemului și de *forțele interioare de legătură* (necunoscute) din legăturile acestui corp cu celelalte corpuri din sistem.

Tipurile de legături (exterioare sau interioare) sunt aceleași cu cele întâlnite în cazul rigidului cu legături și modul de tratare al lor este același. În ce privește forțele de legătură interioare, trebuie respectat cu atenție *principiul acțiunii și reacțiunii*, ceea ce înseamnă că dacă pe un corp apare o acțiune, pe corpul cu care vine în contact va apare o reacțiune egală și direct opusă.

În rezolvarea problemelor de echilibru sistemelor de corpuri apar ca necunoscute parametrii ce fixează poziția de echilibru precum și componentele reacțiunilor. Pentru a elimina unele reacțiuni, care nu interesează, se poate aplica teorema echilibrului părților sau chiar teorema solidificării, adică se scriu ecuațiile de echilibru doar pentru o parte din sistem considerată rigidizată sau pentru întregul sistem considerat ca rigid.

7.3. Probleme rezolvate

R 7.1) Se consideră sistemul de bare în echilibru din figura R 7.1.1. Știind că $l = 1 \text{ m}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $P = 10 \text{ kN}$ și $M = 20 \text{ kN m}$, să se determine reacțiunile din încastrarea A, reazemul simplu B și articulația C.

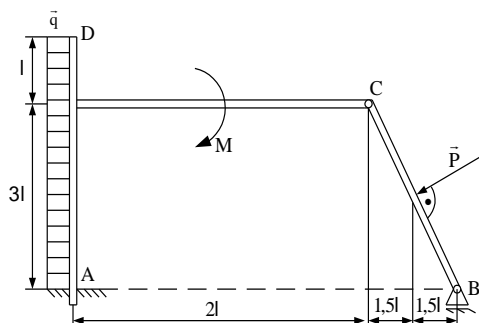


Figura R 7.1.1

Rezolvare: Se aplică metoda izolării corpurilor considerând fiecare corp separat, acționat de forțele exterioare, forțele de legătură cu exteriorul sistemului și forțele de legătură între corpurile care alcătuiesc sistemul. Forța uniform distribuită q se înlocuiește cu o forță concentrată echivalentă $Q = 4 l q$, aplicată la jumătatea barei AD și având aceeași direcție și sens cu forța q . Pentru fiecare corp se scriu cele trei ecuații de echilibru corespunzătoare cazului plan.

Corpul 1 (figura R 7.1.2)

$$\sum X_i = -H_A + Q - H_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_i = V_A - V_C = 0$$

(2)

$$\sum M_{iA} = M_A - M - Q \cdot 2l - V_C \cdot 2l + H_C \cdot 3l = 0$$

(3)

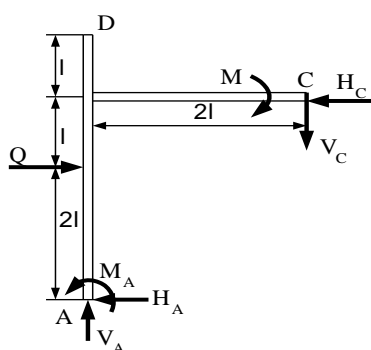


Figura R 7.1.2

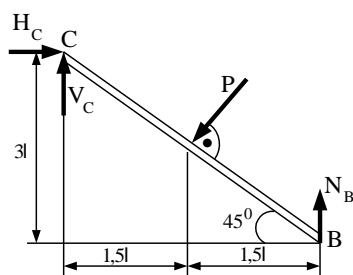


Figura R 7.1.3

Corpul 2 (figura R 7.1.3)

$$\sum X_i = H_C - P \sin 45^\circ = 0$$

(4)

$$\sum Y_i = V_C + N_B - P \cos 45^\circ = 0$$

(5)

$$\sum M_{iC} = N_B \cdot 3l - P \cdot \frac{3\sqrt{2}l}{2} = 0$$

(6)

Din ecuațiile (1 – 6) se obține :

$$\text{In B : } N_B = \frac{\sqrt{2}}{2} P = 5\sqrt{2} \text{ kN}$$

In C : $H_C = P \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ kN} ; V_C = P \cos 45^\circ - N_B = 0$

In A : $H_A = -H_C + Q = (8 - 5\sqrt{2}) \text{ kN} ; V_A = V_C = 0 ;$

$M_A = M + 2lQ + 2lV_C - 3lH_C = 28 - 15\sqrt{2} \text{ kN} \cdot \text{m}$

R 7.2) Bara AB, de greutate G și lungime $4l$, este rezemată fără frecare în punctele A și C ($AC = 3l$). Capătul A este legat cu un fir inextensibil orizontal AD iar bara formează unghiul α cu orizontala. Pe bară, în punctul E ($AE = l$) se găsește o sferă de rază R și greutate P care este prinsă cu firul OF, paralel cu bara AB (figura R 7.2.1). Știind că sistemul este în echilibru, să se determine tensiunile din firele AD și OF.

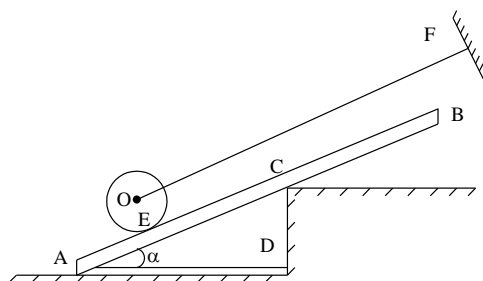


Figura R 7.2.1

Rezolvare: Se izolează cele două corpuri (bara și sfera) și se scriu ecuațiile de echilibru :

Bara AB (figura R 7.2.2)

$$\sum X_i = T_{AD} + N_E \sin \alpha - N_C \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_i = N_A - G - N_E \cos \alpha + N_C \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{iA} = -T_{AD} \cdot l - G \cdot 2l \cos \alpha + N_C \cdot 3l = 0 \quad (3)$$

Sfera de centru O (figura R 7.2.3)

$$\sum X_i = T_{OF} - P \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_i = N_E - P \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

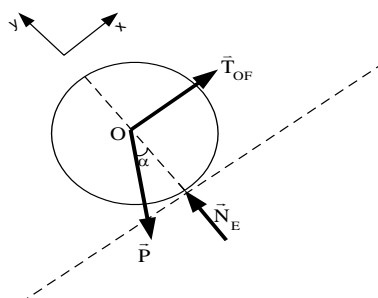
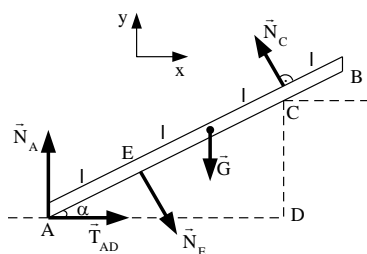


Figura R 7.2.2

Figura R 7.2.3

Din (1 – 5) rezultă :

$$N_E = P \cos \alpha; N_C = \frac{(2G - P \sin \alpha) \cos \alpha}{3 - \sin \alpha}; N_A = \frac{3P \cos^2 \alpha + G(3 - \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha)}{3 - \sin \alpha}$$

$$T_{OF} = P \sin \alpha \quad ; \quad T_{AD} = \frac{(2G - 3P) \sin \alpha \cos \alpha}{3 - \sin \alpha}$$

R 7.3) Fie sistemul de corpuri rigide din figura R 7.3.1. Bara OA, de lungime l și greutate neglijabilă, este încastrată în O și articulată în A cu troliul de raze R_1 și R_2 și greutate Q . Raza fusului articulației este ρ iar coeficientul de frecare este μ . Pe cilindrul mare al troliului este înfășurat un fir care are la un capăt prins un corp de greutate P . De cilindrul mic al troliului este prinsă, tot printr-un fir, placa plană omogenă de greutate G din figură.

Fiind date valorile pentru $l, R_1, R_2, a, \rho, \mu, Q, G$, se cer :

- Valoarea maximă a forței P la echilibru ;
- Reacțiunile în O și A în cazul în care forța P are valoarea maximă.

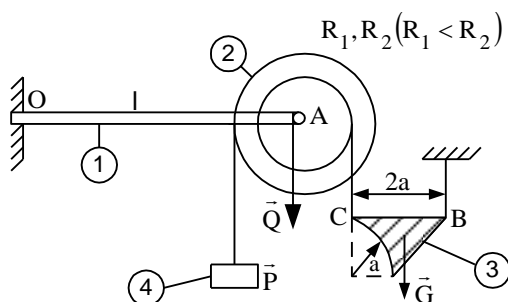


Figura R 7.3.1

Rezolvare: a) Se izolează corpurile sistemului, se introduc forțele exterioare și de legătură și se scriu ecuațiile și condițiile de echilibru la limită. Tendința de mișcare a sistemului care corespunde valorii maxime a forței P este cea în care corpul 4 coboară.

Corpul 1 (figura R 7.3.2)

$$\sum X_i = H_A - H_O = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_i = -V_A + V_O = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{iO} = M_f - M_O + V_A \cdot l = 0 \quad (3)$$

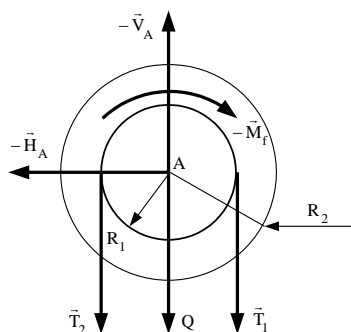
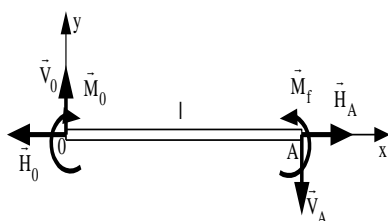


Figura R 7.3.2

Figura R 7.3.3

Corpul 2 (figura R 7.3.3)

$$\sum X_i = -H_A = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_i = V_A - T_1 - T_2 - Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{iA} = T_2 \cdot R_2 - T_1 \cdot R_1 - M_f = 0 \quad (6)$$

$$M_f = \mu \rho \sqrt{H_A^2 + V_A^2} \quad (7)$$

Corpul 3 (figura R 7.3.4)

$$\sum Y_i = T_1 + T_3 - G = 0 \quad (8)$$

$$\sum M_{iB} = G \cdot b - T_1 \cdot 2a = 0 \quad (9)$$

b este abscisa centrului de masă, care se poate determina funcție de a : $b = \frac{13 - 3\pi}{2(6 - \pi)} a$

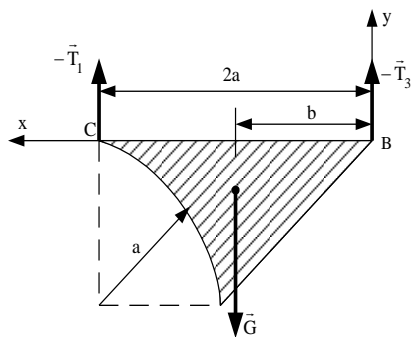


Figura R 7.3.4

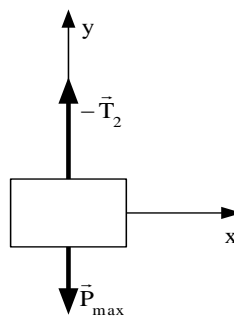


Figura R 7.3.5

Corpul 4 (figura R 7.3.5)

$$\sum Y_i = T_2 - P_{\max} = 0 \quad (10)$$

Din ecuațiile (1 – 10) se obține
$$P_{\max} = \frac{(R_1 + \mu \rho) \frac{b}{2a} G + \mu \rho Q}{R_2 - \mu \rho} .$$

b) Reacțiunile în articulația A și încastrarea O se determină din ecuațiile (1 – 6) .
Componentele lor sunt :

$$\text{In A : } H_A = 0; V_A = P_{\max} + \frac{b}{2a}G + Q; M_f = \mu \rho V_A$$

$$\text{In O : } H_O = 0; V_O = P_{\max} + \frac{b}{2a}G + Q; M_O = (\mu \rho + l)V_O$$

R 7.4) Se consideră sistemul de corpuri din figura P 7.4.1 format din :

- bara cotită ABC ($AB = a, BO = l_1, CO = l_2$) , de greutate neglijabilă, articulată în O (fără frecare) și acționată în C de forța verticală F (necunoscută);
- trolitul de greutate G și raze r, R . Articulația din O_1 este fără frecare ;
- greutatea Q prinsă de roata mică a trolitului prin intermediul unui fir (fără frecare).

Între firul prins în A și D și roata mare a trolitului există frecare de coeficient de frecare μ . Se cer :

a) Domeniul de valori al forței F pentru a se realiza echilibrul în poziția din figură;

b) Reacțiunile în articulațiile O și O_1 pentru $F = F_{\min}$.

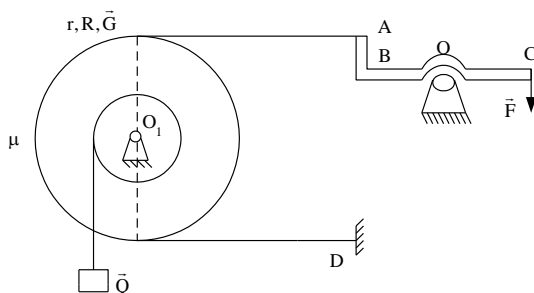


Figura R 7.4.1

Rezolvare: a) Se aplică metoda izolării corpurilor .

Corpul 1 (figura R 7.4.2)

$$\sum X_i = H_O - T_1 = 0$$

(1)

$$\sum Y_i = V_O - F = 0$$

(2)

$$\sum M_{iO} = T_1 \cdot a - F \cdot l_2 = 0$$

(3)

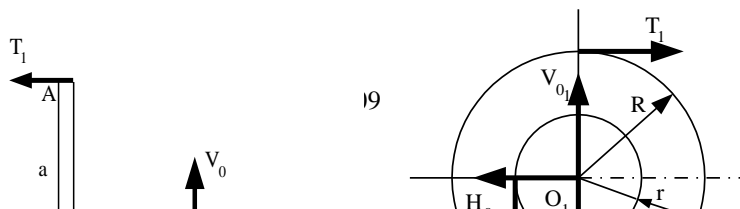


Figura R 7.4.2

Figura R 7.4.3

Corpul 2 (figura R 7.4.3)

$$\sum X_i = H_{O_1} - T_1 - T_2 = 0$$

(4)

$$\sum Y_i = V_{O_1} - G - Q = 0$$

(5)

$$\sum M_{O_1} = Q \cdot r + T_2 \cdot R - T_1 \cdot r = 0$$

(6)

În plus, avem și relația lui Euler:

$$T_2 \exp(-\mu \pi) \leq T_1 \leq T_2 \exp(\mu \pi)$$

(7)

Din (3), (6) și (7) se obține $F \geq F_{\min} = Q \frac{r}{R} \frac{a}{l_2} \frac{\exp(\mu \pi)}{\exp(\mu \pi) - 1}$.

b) În O: $H_O = T_2 = F_{\min} \frac{l_2}{a} = Q \frac{r}{R} \frac{\exp(\mu \pi)}{\exp(\mu \pi) - 1}$, $V_O = F_{\min}$

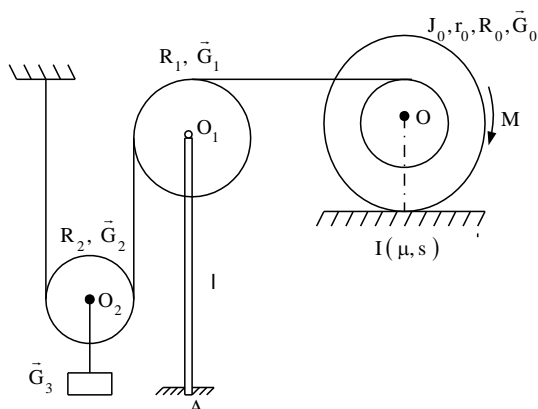
În O_1 : $H_{O_1} = T_2 + T_1 = 2Q \frac{r}{R} \frac{\exp(\mu \pi)}{\exp(\mu \pi) - 1}$, $V_{O_1} = G + Q$

R 7.5. Se consideră sistemul de corpuri rigide din figura R 7.5.1 format din :

- trolul de greutate G_0 , raze r_0, R_0 și moment de inerție față de axa de simetrie egal cu J_0 , aflat pe un plan orizontal caracterizat prin coeficienții de frecare de rostogolire s și coeficientul de frecare de alunecare μ (necunoscuți);
- scripetele fix de greutate G_1 și raza R_1 , articulat în O_1 cu bara verticală AO_1 ;
- bara AO_1 , de lungime l și greutate neglijabilă, încastrată în A;
- scripetele mobil, de greutate G_2 și rază R_2 ;
- greutatea G_3 ;

Corpurile sunt legate între ele prin fire inextensibile și sunt menținute în echilibru în poziția din figură datorită cuplului de moment M aplicat trolului.

Să se determine coeficienții de frecare μ și s pentru ca echilibrul să nu se rupă în sensul de coborâre al greutatei \vec{G}_3 .



Rezolvare: Se aplică metoda izolaării corpurilor.

Troluiul (figura R 7.5.2)

- $$\sum X_i = T_{II} - S_1 = 0$$
- $$\sum Y_i = N_I - G_0 = 0$$
- $$\sum M_{iI} = M + M_r - S_1 (R_0 + r_0) = 0$$
- $$T_I \leq \mu N_I$$
- $$M_r \leq s N_I$$

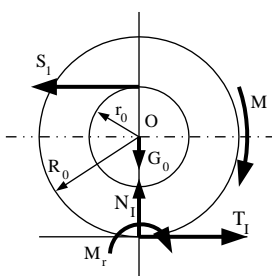


Figura R 7.5.2

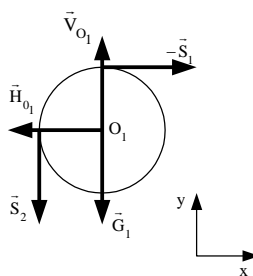


Figura R 7.5.3

Scripetele fix (figura R 7.5.3)

- $$\sum X_i = S_1 - H_{O_1} = 0$$
- $$\sum Y_i = V_{O_1} - G_1 - S_2 = 0$$

$$\sum M_{O_1} = S_1 R_1 - S_2 R_1 = 0 \quad (8)$$

Scripetele mobil (figura R 7.5.4)

$$\sum Y_i = S_2 + S_3 - S_4 - G_2 = 0 \quad (9)$$

$$\sum M_{O_2} = S_3 R_2 - S_2 R_2 = 0 \quad (10)$$

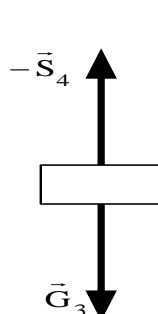
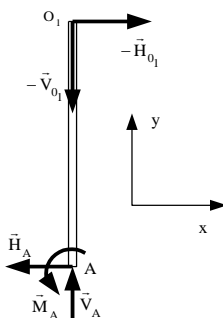
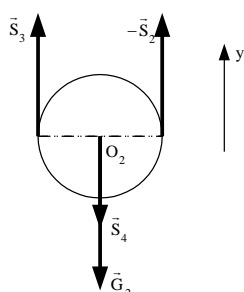


Figura R 7.5.4

Figura R 7.5.5

Figura R 7.5.6

Bara (figura R 7.5.5)

$$\sum X_i = H_{O_1} - H_A = 0 \quad (11)$$

$$\sum Y_i = V_A - V_{O_1} = 0 \quad (12)$$

$$\sum M_{iA} = H_{O_1} \cdot l - M_A = 0 \quad (13)$$

Greutatea G_3 (figura R 7.5.6)

$$\sum Y_i = S_4 - G_3 = 0 \quad (14)$$

Din relațiile (1 – 14) rezultă :

$$S_1 = S_2 = S_3 = T_I = H_A = H_{O_1} = \frac{G_2 + G_3}{2}, S_4 = N_I = G_0, M_A = \frac{G_2 + G_3}{2} l$$

$$V_A = V_{O_1} = \frac{2G_1 + G_2 + G_3}{2}, M_r = \frac{G_2 + G_3}{2} (R_0 + r_0) - M$$

$$\mu \geq \frac{G_2 + G_3}{2G_0} = \mu_{\min}, s \geq \frac{(G_2 + G_3)(R_0 + r_0) - 2M}{2G_0} = s_{\min}$$

7.4. Probleme propuse

7.4.1. Teste clasice

TC 7.1) Se consideră sistemul de bare articulate din figura TC 7.1.1. Cunoșcând forțele \vec{P}_1 și \vec{P}_2 , cuplurile \vec{M}_1 și \vec{M}_2 , unghiul α precum și distanța a , să se determine reacțiunile din reazemele A și B, articulațiile C și D și încastrarea E.

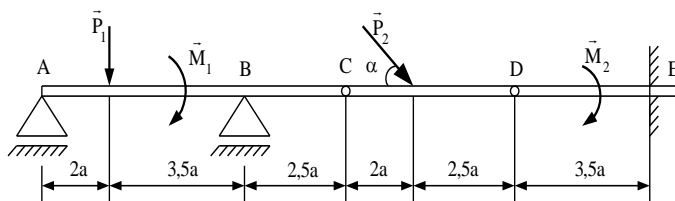


Figura TC 7.1.1

TC 7.2) Sistemul din figura TC 7.2.1 este format dintr-un disc omogen de greutate G și rază R , care se sprijină pe o bară orizontală de greutate neglijabilă care este articulată în A și simplu rezemată în B, și un corp de greutate P aflat pe un plan neted și înclinat cu unghiul α față de orizontală. Știind că $AC = CB = l$, $R = l/3$, $G = 1000 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$ și că în C există frecare atât de alunecare cât și de rostogolire de coeficienți $\mu = 0,1$ și $s = 0,15 R$, se cer:

- Valorile forței P pentru echilibru;
- Reacțiunile în A și B pentru $P = P_{\max}$.

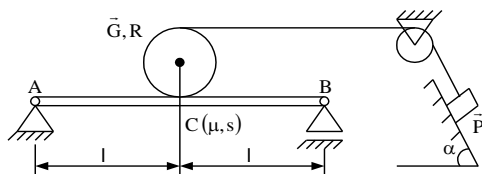


Figura TC 7.2.1

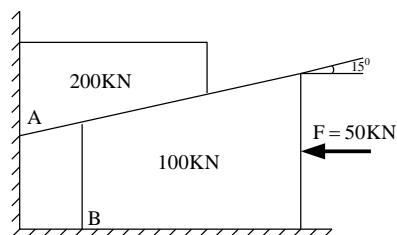


Figura TC 7.3.1

TC 7.3) Două blocuri de piatră de greutăți $G_1 = 200 \text{ kN}$ și $G_2 = 100 \text{ kN}$ se sprijină unul pe celălalt și pe doi pereți perpendiculari (figura TC 7.3.1). Coeficientul de frecare între oricare două suprafețe de contact este $\mu = 0,2$. Este suficientă forța $F = 50 \text{ kN}$ pentru a menține cele două blocuri în echilibru? Se consideră că forța F se aplică în planul median al celor două blocuri astfel încât putem considera că problema este coplanară.

TC 7.4) Se dă sistemul de corpuri din figura TC 7.4.1. Bara cotită OBC ($m(\hat{OBC} = 90^\circ)$) are greutatea neglijabilă și este încastrată în capătul O. În C este articulată pe bară un trolu de raze R_1 și R_2 și greutate G . Articulația din C este cu frecare de coeficient μ_0 iar raza fusului articulației este ρ . Pe cilindrul de rază R_1 este înfășurat un fir care la celălalt capăt este prins de centrul O_2 al unui disc de greutate Q , simplu rezemat în A pe bara OBC, direcția firului fiind schimbată prin intermediul unui

mic scripete (în K) de masă și frecare neglijabilă. În reazemul A există frecare de alunecare de coeficient μ și frecare de rostogolire de coeficient s . Pe cilindrul de rază R_2 este înfășurat alt fir care la capătul celălalt este prins pe un rotor de rază R și greutate G_1 , acționat de un moment motor M_m . Se mai dau lungimile $OA = l$, $AB = BC = 2l$. Se cer:

- Să se determine valoarea maximă a momentului motor M_m în cazul echilibrului;
- Reacțiunile din articulația C și încastrarea O.

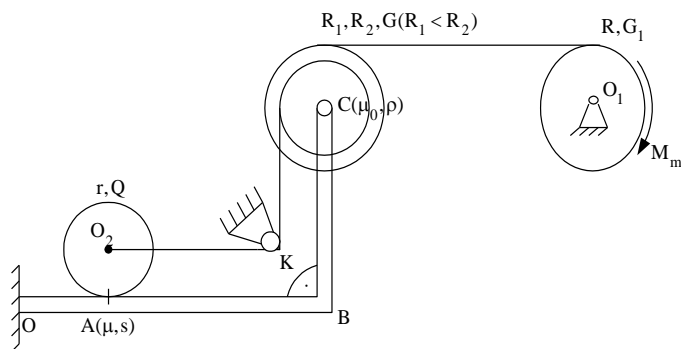


Figura TC 7.4.1

TC 7.5) Se consideră sistemul de solide rigide din figura TC 7.5.1 format din:

- bara O_1E , de lungime R și greutate neglijabilă;
- corpul de greutate P ;
- discul de rază R și greutate G cu centrul în punctul C;
- bara O_2B , de lungime $3R$ și greutate neglijabilă, înclinată cu unghiul α față de orizontală.

Între fir și disc există frecare de alunecare de coeficient μ_1 iar între disc și bara O_2B frecare de alunecare de coeficient μ și frecare de rostogolire de coeficient s .

Cunoscând că $O_2D = R$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $s = \frac{R}{4\sqrt{3}}$, $\mu_1 = \frac{3}{\pi} \ln \frac{5}{2}$, să se determine:

- Domeniul de valori al greutății P în cazul echilibrului;
- Reacțiunile din articulațiile O_1 și O_2 și reazemul B pentru valoarea maximă a lui P .

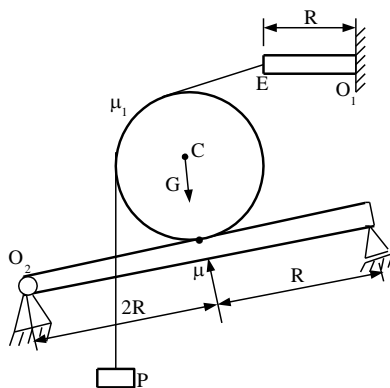


Figura TC 7.5.1

7.4.2. Teste grilă

TG 7.1) Ce forță F este necesară pentru a deplasa corpul de masă $M_2 = 300\text{kg}$ spre dreapta? Coeficientul de frecare la contactul între oricare două suprafețe este $\mu = 0,3$ (figura TG 7.1.1). Se va lua $g \cong 10\text{ m/s}^2$.

a) $F \cong 2473\text{N}$; b) $F \cong 1583\text{N}$; c) $F \cong 1182\text{N}$; d) $F \cong 985\text{N}$.

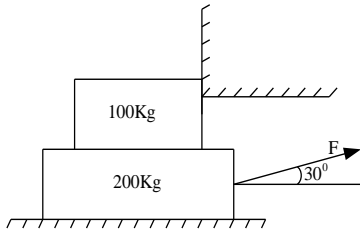


Figura TG 7.1.1

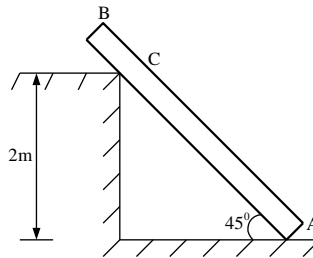


Figura TG 7.2.1

TG 7.2) Care este valoarea minimă a coeficientului de frecare μ între bara AB și suprafețele de reazem pentru ca bara AB să rămână în echilibru în poziția din figura TG 7.2.1?

Se cunoaște greutatea barei $G = 200\text{ N}$ și lungimea ei $L = 3,3\text{ m}$.

a) $\mu_{\min} = 0,322$; b) $\mu_{\min} = 0,127$; c) $\mu_{\min} = 0,275$; d) $\mu_{\min} = 0,405$.

7.5. Indicații și răspunsuri

TC 7.1) Vezi figura TC 7.1.2.

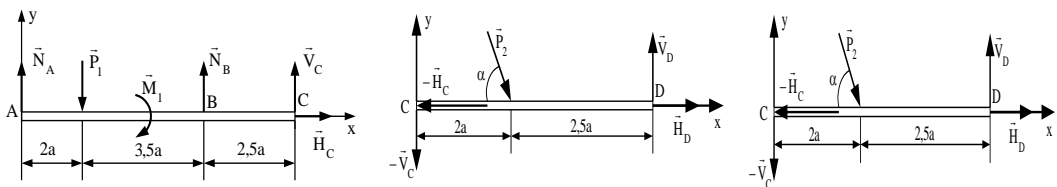


Figura TC 7.1.2

Ecuatiile de echilibru pentru cele trei corpuri sunt:

$$\begin{aligned} H_C = 0, N_A - P_1 + N_B + V_C = 0, -N_A \cdot 8a + P_1 \cdot 6a - M_1 - N_B \cdot 2,5a = 0 \\ H_D + P_2 \cos \alpha - H_C = 0, V_D - P_2 \sin \alpha - V_C = 0, -V_C \cdot 4,5a - P_2 \sin \alpha \cdot 2,5a = 0 \\ H_E - H_D = 0, V_E - V_D = 0, -M_E - M_2 + V_D \cdot 3,5a = 0. \end{aligned}$$

Soluția acestui sistem este:

$$\text{În A : } N_A = \frac{7}{11} P_1 - \frac{2}{11} \frac{M_1}{a} - \frac{25}{29} P_1 \sin \alpha ;$$

$$\text{În B : } N_B = \frac{4}{11} P_1 - \frac{2}{11} \frac{M_1}{a} + \frac{80}{29} P_1 \sin \alpha ;$$

$$\text{În C : } H_C = 0 , V_C = -\frac{5}{9} P_1 \sin \alpha ;$$

$$\text{În D : } H_D = -P_2 \cos \alpha , V_D = \frac{4}{9} P_2 \sin \alpha ;$$

$$\text{În E : } H_E = -P_2 \cos \alpha , V_E = \frac{4}{9} P_2 \sin \alpha , M_E = \frac{14}{9} P_2 a \sin \alpha - M_2 .$$

TC 7.2) Vezi figura TC 7.2.2. Tendința de mișcare a discului este de la A spre B.

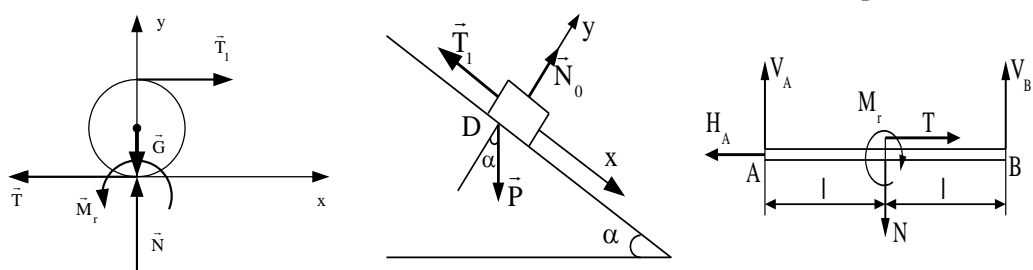


Figura TC 7.2.2

Ecuatiile și condițiile de echilibru pentru cele trei corpuri sunt:

$$(1) \quad T_1 - T = 0, \quad N - G = 0, \quad M_r - T_1 \cdot 2R = 0, \quad T \leq \mu N, \quad M_r \leq s N$$

$$(2) \quad P \sin \alpha - T_1 = 0, \quad N_D - P \cos \alpha = 0$$

$$(3) \quad T - H_A = 0, \quad V_A + V_B - N = 0, \quad -M_r - N \cdot l + V_B \cdot 2l = 0$$

Din (1) și (2) găsim că $P \leq P_{\max} = \max \left(\frac{\mu}{\sin \alpha} G, \frac{s}{2R \sin \alpha} G \right) = 200 N$.

Pentru $P = P_{\max}$, valorile reacțiunilor sunt:

$$H_A = P_{\max} \sin \alpha = 75 N, \quad V_A = \frac{G}{2} - \frac{R}{l} P_{\max} \sin \alpha = 475 N,$$

$$V_B = \frac{G}{2} + \frac{R}{l} P_{\max} \sin \alpha = 525 N.$$

TC 7.3) Vezi figura TC 7.3.2 (tendința de mișcare a blocului B spre stânga).

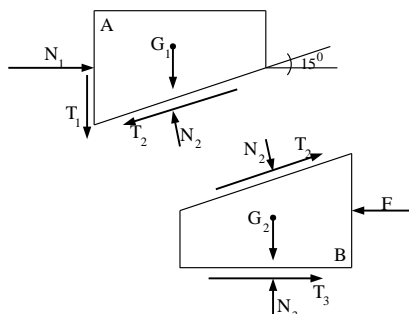


Figura TC 7.3.2

Ecuatiile scalare de echilibru asociate celor două corpuri sunt:

$$\begin{aligned} \text{Blocul A : } & \begin{cases} N_1 - T_2 \cos 15^\circ - N_2 \sin 15^\circ = 0 \\ N_2 \cos 15^\circ - T_2 \sin 15^\circ - T_1 - G_1 = 0 \end{cases}; \\ \text{Blocul B : } & \begin{cases} T_3 - F - T_2 \cos 15^\circ + N_2 \sin 15^\circ = 0 \\ -N_2 \cos 15^\circ + T_2 \sin 15^\circ + N_3 - G_2 = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

la care se adaugă condițiile: $T_1 \leq \mu N_1$, $T_2 \leq \mu N_2$, $T_3 \leq \mu N_3$. Se obține $F \geq 174 \text{ N}$, astfel încât forța de 50 N este suficientă pentru a menține echilibrul în sensul studiat. Se face, în mod identic, un studiu al tendinței de mișcare spre dreapta a blocului B.

TC 7.4) Vezi figura TC 7.4.2.

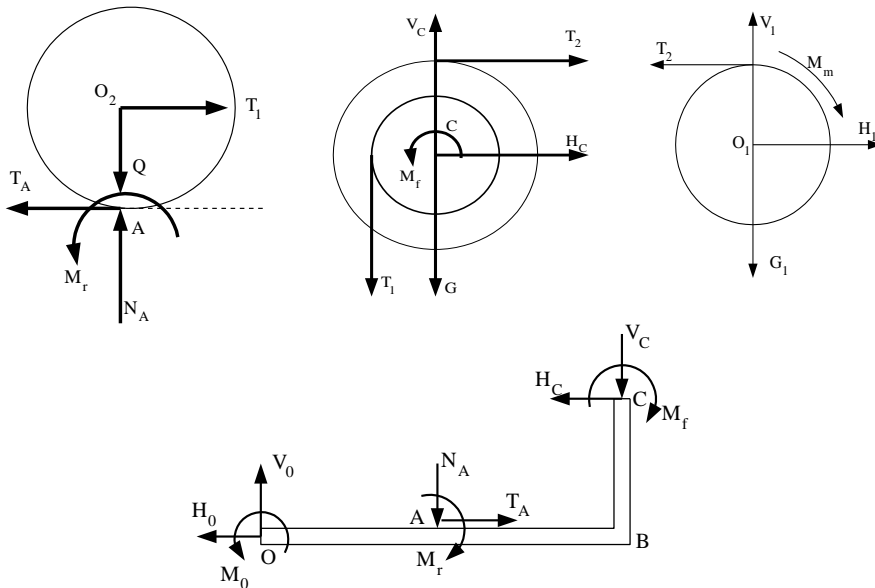


Figura TC 7.4.2

Ecuțiile de echilibru și condițiile de echilibru pentru cele patru corpuri sunt:

$$\begin{aligned}
 T_1 - T_A = 0, \quad N_A - Q = 0, \quad M_r - T_1 r = 0, \quad T_A \leq \mu N_A, \quad M_r \leq s N_A, \\
 M_f + T_1 R_1 - T_2 R_2 = 0, \quad M_f \leq \mu_0 \rho \sqrt{H_C^2 + V_C^2}, \\
 -H_O + T_A - H_C = 0, \quad V_O - N_A - V_C = 0, \\
 M_O - M_r - M_f - N_A \cdot l + H_C \cdot 2l - V_C \cdot 3l = 0, \\
 H_1 - T_2 = 0, \quad V_1 - G_1 = 0, \quad M_m - T_2 \cdot R = 0.
 \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem la limită pentru M_m^{\max} inecuațiile devin ecuații. Se obține:

$$\begin{aligned}
 H_O &= \frac{s}{R} Q + \frac{M_m}{R}, \quad V_O = \left(1 + \frac{s}{R}\right) Q + G, \\
 M_O &= \left(s + R - \frac{s}{r} R_1 + \frac{3s}{R} l\right) Q + 3l G + (2l + R_2) \frac{M_m}{R}, \\
 H_C &= -\frac{M_m}{R}, \quad V_C = \frac{s}{R} Q + G, \quad M_f = -\frac{s}{r} R_1 Q + \frac{R_2}{R} M_m.
 \end{aligned}$$

Momentul motor rezultă dintr-o ecuație de gradul al doilea obținută prin eliminarea celorlalte necunoscute (pentru $\mu_0 = 0$). Valoarea sa este:

$$M_m = \frac{s}{r} \frac{R R_1}{R_2} Q.$$

TC 7.5) Vezi figura TC 7.5.2.

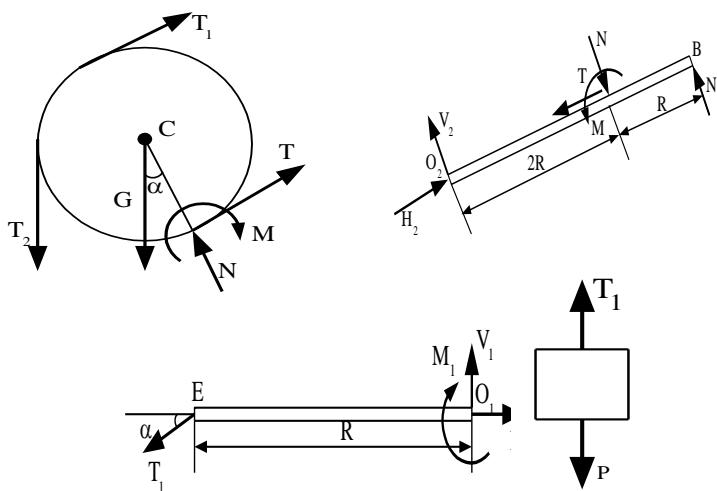


Figura TC 7.5.2

a) Se scriu ecuațiile și condițiile de echilibru și se obține un sistem de 10 ecuații și 3 inecuații cu 12 necunoscute: $H_1, V_1, M_1, T_1, N, T, M, T_2, V_2, H_2, N_2$ și P . În scrierea condițiilor de echilibru se are în vedere dubla tendință de mișcare.

$$(1) \quad \begin{aligned} T + T_1 - (G + T_2) \sin \alpha = 0, \quad N - (G + T_2) \cos \alpha = 0, \quad -M + (T_2 + T - T_1) \cdot R = 0, \\ H_2 - T = 0, \quad N_2 + V_2 - N = 0, \quad M + N_2 \cdot 3R - N \cdot 2R = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} H_1 - T_1 \cos \alpha = 0, \quad V_1 - T_1 \sin \alpha = 0, \quad M_1 - T_1 R \sin \alpha = 0, \quad T_1 - P = 0. \\ -\mu N \leq T \leq \mu N, \quad -s N \leq M \leq s N, \quad T_2 e^{-\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \leq T_1 \leq T_2 e^{\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \end{aligned}$$

Se aleg ca parametri forțele P și T . Din (1) găsim:

$$(3) \quad \begin{aligned} T_1 = (G + P) \sin \alpha - T, \quad N = (G + P) \cos \alpha, \quad M = R[2T + P - (G + T) \sin \alpha], \\ T_2 = P, \quad H_2 = T, \quad V_2 = \frac{1}{3}[(G + P)(\cos \alpha - \sin \alpha) + P + 2T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 = \frac{1}{3}[(G + P)(2 \cos \alpha + \sin \alpha) - P - 2T], \quad H_1 = [(G + P) \sin \alpha - T] \cos \alpha, \\ V_1 = [(G + P) \sin \alpha - T] \sin \alpha, \quad M_1 = R[(G + P) \sin \alpha - T] \sin \alpha. \end{aligned}$$

Înlocuind aceste valori în (2) deducem inecuațiile:

$$(4) \quad \begin{aligned} T + \frac{P}{4} + \frac{G}{4} \geq 0, \quad T - \frac{P}{4} - \frac{G}{4} \leq 0, \\ T + \frac{5P}{16} - \frac{3G}{16} \geq 0, \quad T + \frac{3P}{16} - \frac{5G}{16} \leq 0 \end{aligned}$$

$$T - \frac{P}{10} - \frac{G}{2} \leq 0, \quad T + 2P - \frac{G}{2} \geq 0.$$

Acest sistem se rezolvă grafic în sistemul de coordonate (P, T) . Valoarea minimă, P_{\min} , se obține din intersecția dreptelor de ecuație $T - \frac{P}{4} - \frac{G}{4} = 0$ și $T + 2P - \frac{G}{2} = 0$. Ea este egală cu $P_{\min} = \frac{G}{9}$. Corespunzător ei avem și $T_{\min} = \frac{5G}{18}$. În plus, $P_{\max} = \infty$.

Pierderea echilibrului se poate face doar prin alunecarea firului pe disc și coborârea prin rostogolire fără alunecare a discului pe dreapta O_2B .

b) Pentru $P = \frac{G}{9}$ și $T = \frac{5G}{18}$ se obțin reacțiunile:

$$H_1 = \frac{5\sqrt{3}}{36} G, V_1 = \frac{5}{36} G, M_1 = \frac{5}{36} R G, H_2 = \frac{5}{18} G, V_2 = \frac{5\sqrt{3}+1}{27} G, N_2 = \frac{10\sqrt{3}-1}{27} G.$$

TG 7.1) Se izolează cele două corpuri (figura TG 7.1.2).

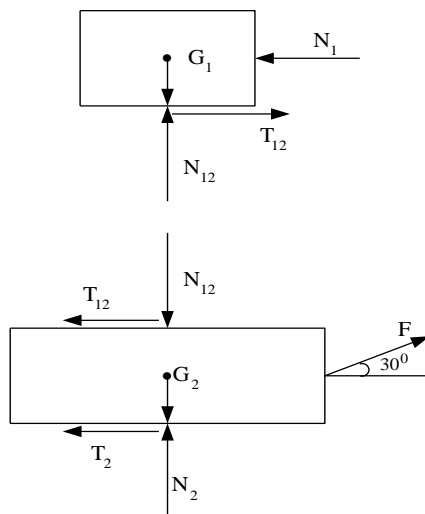


Figura TG 7.1.2

Scriind ecuațiile de echilibru la limită se obține valoarea :

$$F = \frac{(2m_2 + m_1)g}{\sin 30^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{\mu}} \cong 1182 N.$$

Răspuns corect : c).

TG 7.2) Vezi figura TG 7.2.2.

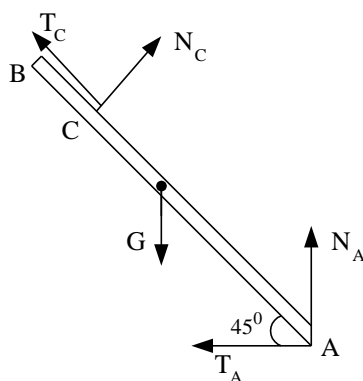


Figura TG 7.2.2

Se scriu ecuațiile de echilibru pe orizontală și verticală și ecuația de momente față de punctul A precum și condițiile de echilibru la limită $T_A = \mu N_A, T_C = \mu N_C$. Se obține $\mu_{\min} = 0,322$. Răspuns corect: **a**).

CINEMATICA

Cinematica studiază mișcările mecanice ale corpurilor fără a lua în considerare masa acestora precum și forțele care acționează asupra lor.

În cinematică sunt folosite noțiunile fundamentale de spațiu și timp. Noțiunea de mișcare este o noțiune complexă care înglobează în sfera ei mai multe elemente:

- corpul care se mișcă (numit și *mobil*);
- mediul în care se efectuează mișcarea;
- sistemul de referință (reperul) în raport cu care se efectuează mișcarea.

Dacă reperul este **fix**, atunci mișcarea se numește **absolută** iar dacă reperul este **mobil** mișcarea se numește relativă.

A cunoaște mișcarea unui rigid înseamnă a cunoaște mișcarea oricărui punct al rigidului. Iată de ce, în cele ce urmează, se stabilesc principalele noțiuni cinematice luând în considerare punctul material.

8. Cinematica mișcării absolute a punctului material

8.1. Traietorie, viteză și accelerație

8.1.1. Traietorie

Mișcarea unui punct material M este cunoscută dacă în orice moment se poate preciza poziția lui în raport cu un punct fix O , adică dacă se cunoaște vectorul de poziție \vec{r} ca funcție de timp :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

(8.1)

Funcția \vec{r} se consideră continuă, uniformă, derivabilă de cel puțin două ori și finită în modul (figura T 8.1) .

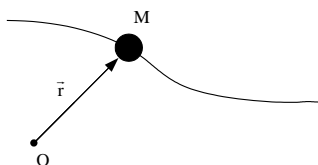


Figura T 8.1

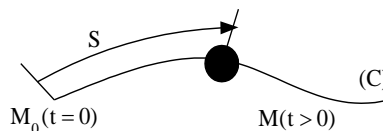


Figura T 8.2

Mișcarea unui punct material M este cunoscută și dacă se indică curba (C) pe care se mișcă punctul (figura T 8.2) și modul în care se mișcă pe aceasta, mai precis dacă se cunoaște legea $s = s(t)$, numită *lege orară* a mișcării.

Prin traietorie se înțelege locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de punct în mișcarea sa (sau locul geometric al extremităților vectorului de poziție \vec{r}). Între traietorie și curba (C) pe care se mișcă punctul nu există totdeauna o identitate.

8.1.2. Viteza

Mobilele pot parcurge aceeași distanță în intervale diferite de timp sau distanțe diferite în același interval de timp astfel încât pentru caracterizarea mișcării este necesar să se introducă noțiunea de viteză.

Prin definiție, *viteza (instantanee) unui punct material este dată de derivata întâia a vectorului de poziție în raport cu timpul* :

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} \quad \text{not } \vec{r}$$

(8.2)

Observații : i) În mecanică, derivata de prim ordin a unei funcții scalare sau vectoriale se notează cu un punct deasupra numelui funcției, derivata de ordin doi prin două puncte ș.a.m.d.

ii) Se observă că $\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, unde $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{medie}$ este viteza medie în

intervalul de timp Δt , $\Delta \vec{r}$ fiind ‘‘creșterea’’ vectorului de poziție \vec{r} .

iii) Unitatea de măsură pentru viteză în sistemul internațional SI este $m \cdot s^{-1}$.

8.1.3. Accelerația

Este o mărime vectorială care caracterizează variația vitezei unui punct în mișcarea sa ca direcție, sens și modul.

Prin definiție, *accelerația (instantanee) unui punct este dată de derivata întâia a vectorului viteză în raport cu timpul sau de derivata a doua a vectorului de poziție în raport cu timpul* :

$$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

(8.3)

Observații : iv) Se observă că $\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, unde $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{medie}$ este

accelerația medie în intervalul de timp Δt , $\Delta \vec{v}$ fiind ‘‘creșterea’’ vectorului viteză.

v) Unitatea de măsură pentru accelerație în sistemul internațional SI este $m \cdot s^{-2}$.

8.2. Expresiile analitice ale vitezei și accelerației în diferite sisteme de coordonate

8.2.1. Sistemul de coordonate Frenet (intrinseci, naturale)

Triedrul Frenet este un triedru mobil (figura T 8.3), având originea în punctul M care efectuează mișcarea și axele :

- *tangenta la curbă*, orientată pozitiv în sensul de creștere a arcului s , de versor $\vec{\tau}$;
- *normala principală*, adică normala din planul osculator al curbei, orientată pozitiv spre centrul de curbură, de versor $\vec{\nu}$;
- *binormala*, adică normala pe planul osculator, de versor $\vec{\beta}$ considerat astfel încât versorii $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ și $\vec{\beta}$ luați în această ordine să formeze un triedru drept ($\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$).

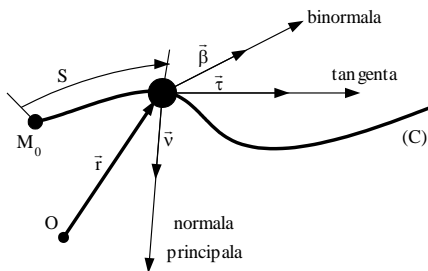


Figura T 8.3

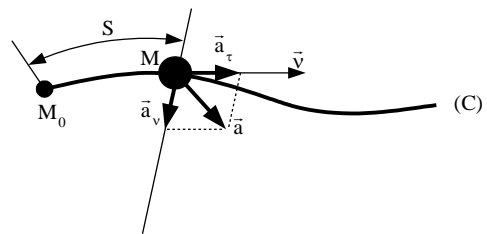


Figura T 8.4

Mișcarea punctului este dată de legea orară $s = s(t)$ iar vectorul de poziție în raport cu punctul fix O se exprimă în funcție de elementul de arc s , adică

$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

(8.4)

Pentru determinarea componentelor vitezei și accelerației pe axele triedrului lui Frenet reamintim două formule din geometria diferențială (formulele lui Frenet) :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \quad , \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{\nu}$$

(8.5)

unde ρ este raza de curbură în punctul M .

Viteza punctului M este dată de relația :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{\tau}$$

(8.6)

iar proiecțiile sale pe axele reperului considerat și modulul său sunt :

$$v_{\tau} = \dot{s} \quad , \quad v_{\nu} = 0 \quad , \quad v_{\beta} = 0 \quad , \quad \left| \vec{v} \right| = \dot{s}$$

(8.7)

Rezultă că viteza este tangenta la traiectorie, are sensul mișcării și scalarul egal cu derivata în raport cu timpul a arcului s .

Ținând seama de a doua formulă Frenet și de relația de definiție (8.3), vectorul accelerație este egal cu :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{s} \vec{\tau} \right) = \ddot{s} \vec{\tau} + \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{\nu} \quad (8.8)$$

Proiecțiile și modulul vectorului accelerație sunt :

$$a_{\tau} = \ddot{s}, \quad a_{\nu} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad a_{\beta} = 0, \quad \left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(\ddot{s} \right)^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho} \right)^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \quad (8.9)$$

Accelerația are două componente (figura 8.4), ambele în planul osculator (determinat de vectorii $\vec{\tau}$ și $\vec{\nu}$), și anume accelerația tangențială \vec{a}_{τ} (pe direcția tangentei la curba (C)) și accelerația normală \vec{a}_{ν} (pe direcția normalei principale, orientată totdeauna spre interiorul curbei). Vectorul accelerație va fi în consecință și el orientat spre concavitatea (interiorul) curbei.

Observație : Din expresia (8.9) rezultă că singura mișcare în care accelerația este nulă este mișcarea rectilinie și uniformă (pe o dreaptă cu viteză constantă în modul :

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow a_{\tau} = a_{\nu} = 0 \Rightarrow \dot{v} = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow v = \text{constant}, \rho = \infty \text{ (dreapta)}.$$

8.2.2. Sistemul de coordonate carteziene

În sistemul de coordonate carteziene Oxyz vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ este definit prin coordonatele x, y și z ale punctului material (figura 8.5). A cunoaște mișcarea punctului înseamnă a cunoaște coordonatele sale ca funcție de timp :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (8.10)$$

Expresiile (8.10) se numesc *ecuații parametrice ale traiectoriei* și ele permit obținerea acestora prin eliminarea variabilei timp t. Vectorul de poziție are expresia :

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \quad (8.11)$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii constanți ai axelor de coordonate.

Expresiile analitice, componentele pe axe și modulele în coordonate carteziene ale vectorilor viteză și accelerație sunt :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}, v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}, |\vec{v}| &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}, |\vec{a}| &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \end{aligned}$$

(8.12)

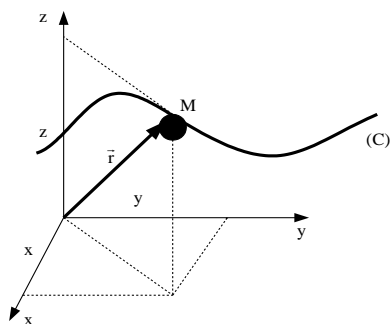


Figura T 8.5

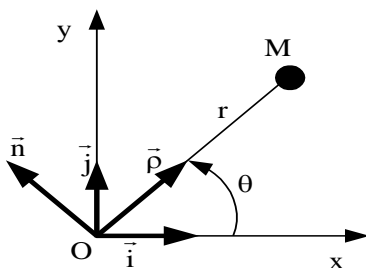


Figura T 8.6

8.2.3. Sistemul de coordonate polare

Dacă traiectoria este plană, poziția punctului poate fi precizată prin coordonate polare și anume prin *raza polară* $r = OM$ și *unghiul polar* $\theta = \widehat{Ox, OM}$ măsurat în sens trigonometric față de Ox (figura T 8.6). Ecuațiile parametrice ale traiectoriei au forma :

$$(8.13) \quad r = r(t) \quad , \quad \theta = \theta(t)$$

Pentru a exprima componentele vectorilor viteză și accelerație se consideră, în plus față de Oxy, un sistem de axe plan și mobil având direcțiile razei polare, de versor $\vec{\rho}$, și perpendiculara pe raza polară, de versor \vec{n} , orientat în sensul crescător al unghiului polar θ . Față de sistemul ales, vectorul de poziție are expresia :

$$(8.14) \quad \vec{r} = \vec{OM} = r \cdot \vec{\rho}$$

Pentru aflarea vectorilor \vec{v} și \vec{a} sunt necesare derivatele vectorilor $\vec{\rho}$ și \vec{n} . Pentru aceasta, se exprimă versorii $\vec{\rho}$ și \vec{n} în funcție de versorii \vec{i} și \vec{j} și se derivează în raport cu timpul relațiile obținute :

$$(8.15) \quad \begin{aligned} \vec{\rho} &= \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j} \quad , \quad \vec{n} = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} \\ \dot{\vec{\rho}} &= \left(-\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} \right) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \vec{n} \quad , \quad \dot{\vec{n}} = \left(-\cos \theta \cdot \vec{i} - \sin \theta \cdot \vec{j} \right) \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{\rho} \end{aligned}$$

Conform definiției, putem scrie :

$$(8.16) \quad \begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{\rho} + r \dot{\vec{\rho}} = \dot{r} \vec{\rho} + r \dot{\theta} \vec{n} \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{r} \vec{\rho} + \dot{r} \dot{\vec{\rho}} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{n} + r \ddot{\theta} \vec{n} + r \dot{\theta} \dot{\vec{n}} = \ddot{r} \vec{\rho} + 2\dot{r}\dot{\theta} \vec{n} + r\ddot{\theta} \vec{n} - r\dot{\theta}^2 \vec{\rho} \end{aligned}$$

Ținând cont de (8.15) se obțin următoarele expresii analitice ale vectorilor viteză și accelerație în coordonate polare, precum și proiecțiile lor pe axe și modulele lor :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{\rho} + r \dot{\theta} \vec{n} \quad , \quad v_r = \dot{r} \quad , \quad v_n = r \dot{\theta} \quad , \quad \left| \vec{v} \right| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{\rho} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \vec{n}$$

(8.17)

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \quad \left| \vec{a} \right| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right)^2}$$

Observație : Expresiile vectorilor viteză și accelerație s-au obținut ținând cont de modul de exprimare al vectorului de poziție în diverse sisteme de referință și folosind relațiile de

definiție $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ și $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$. S-au expus cazurile coordonatelor intrinseci, carteziene și polare, dar se pot studia și alte cazuri cum ar fi cel al coordonatelor cilindrice, sferice, generalizate etc. În toate situațiile se procedează la fel, plecând de la expresia vectorului de poziție în sistemul de coordonate respectiv [2].

8.3. Mișcări particulare ale punctului material : mișcarea rectilinie și mișcarea circulară

8.3.1. Mișcarea rectilinie

Mișcarea rectilinie este mișcarea la care traiectoria este o dreaptă (sau o parte a unei drepte). Pentru studiul acestei mișcări se poate utiliza un sistem cartezian având axa Ox suprapusă peste dreapta pe care are loc mișcarea (figura T 8.7). Mișcarea este cunoscută dacă se cunoaște la fiecare moment de timp distanța $OM = x(t)$. Deoarece

$\vec{r} = x \cdot \vec{i}$, rezultă că $\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i}$, $\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i}$, adică vectorii viteză și accelerație sunt

dirijați pe Ox. Mișcarea este *accelerată* (modulul vitezei crește) dacă vectorii \vec{v} și \vec{a} au același sens și *încetinită* (modulul vitezei scade) în caz contrar.

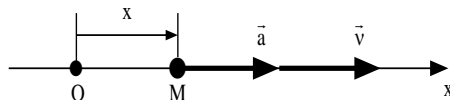


Figura T 8.7

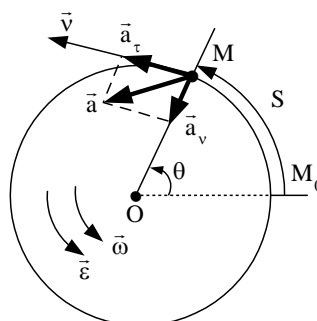


Figura T 8.8

În cele ce urmează se vor studia două cazuri particulare de mișcări rectilinii.

8.3.1.1. Mișcarea rectilinie uniformă

Mișcarea unui punct pe o dreaptă cu viteză constantă se numește mișcare rectilinie și uniformă.

Notând cu v_0 scalarul vitezei, putem scrie :

$$(8.18) \quad v = v_0 = \dot{x} = \text{constant} \quad \text{sau} \quad \dot{x} = v_0 = \text{constant}$$

Integrând ecuația (8.18) obținem $x = v_0 t + c_1$, unde constanta de integrare se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$(8.19) \quad t = 0 : \quad x = x_0, \quad v = v_0$$

Deci $c_1 = x_0$, astfel încât legile mișcării rectilinii uniforme sunt :

$$(8.20) \quad x = x_0 + v_0 t, \quad v = v_0 = \text{constant}, \quad a = 0$$

8.3.1.2. Mișcarea rectilinie uniform variată

Mișcarea unui punct pe o dreaptă cu accelerație constantă se numește mișcare rectilinie uniform variată.

Notând cu a_0 scalarul accelerației, putem scrie :

$$(8.21) \quad \ddot{x} = a_0 = \text{constant}$$

Integrând de două ori ecuația (8.21) și ținând seama de condițiile inițiale (8.19) se obțin următoarele legi ale mișcării rectilinii uniform variate :

$$(8.22) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}, \quad v = v_0 + a_0 t, \quad a = a_0 = \text{constant}$$

În plus, eliminând timpul t între primele două relații (8.22), obținem formula lui Galilei :

$$(8.23) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)$$

8.3.2. Mișcarea circulară

Mișcarea unui punct material pe un cerc se numește mișcare circulară.

Pentru studiul mișcării circulare se consideră sistemul de referință Frenet (figura T 8.8), ale cărui axe sunt :

- tangenta la cerc în M, de versor $\vec{\tau}$, orientată pozitiv în sensul de creștere a arcului $M_0M = s$;
 - normala principală, care este chiar normala în M din planul cercului (pe direcția razei), de versor $\vec{\nu}$, orientată pozitiv spre centrul cercului ;
 - binormala, adică perpendiculara în M pe planul cercului.
- În mișcarea circulară legea de mișcare este dată de una din funcțiile :
- $$s = s(t) \quad \text{sau} \quad \theta = \theta(t)$$

(8.24)

unde $s = R \cdot \theta$, R fiind raza cercului iar $\theta = \text{mas}\left(\widehat{OM_0, OM}\right)$.

Scalarul vitezei este :

$$v = \dot{s} = R \dot{\theta}$$

(8.25)

iar componentele accelerației sunt :

$$a_\tau = \ddot{s} = R \ddot{\theta}, \quad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{R} = R \dot{\theta}^2$$

(8.26)

Notând

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

(8.27)

relațiile (8.25) și (8.27) devin :

$$v = R \omega, \quad a_\tau = R \varepsilon, \quad a_\nu = R \omega^2, \quad a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

(8.28)

Mărimea ω caracterizează variația unghiului θ în unitatea de timp. Se numește *viteză unghiulară* și se măsoară în rad/s.

Mărimea ε caracterizează variația vitezei unghiulare ω în unitatea de timp. Se numește *accelerație unghiulară* și se măsoară în rad/s^2 .

8.3.2.1. Mișcarea circulară uniformă

Dacă scalarul vitezei rămâne constant (deci și al vitezei unghiulare), mișcarea se numește mișcare circulară uniformă.

Considerând condiția inițială :

$$t=0 : \theta = \theta_0$$

(8.29)

obținem legile mișcării circulare uniforme:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_0 t, \quad \omega = \omega_0 = \text{constant}, \quad \varepsilon = 0 \\ s &= s_0 + v_0 t, \quad v = v_0 = \text{constant}, \quad a_\tau = 0, \quad a_D = R \omega_0^2 \\ (8.30) \\ \text{unde } s_0 &= R \theta_0, v_0 = R \omega_0.\end{aligned}$$

8.3.2.2. Mișcarea circulară uniform variată

Dacă scalarul accelerației tangențiale rămâne constant (deci și al accelerației unghiulare), mișcarea se numește mișcare circulară uniform variată.

Considerând condițiile inițiale :

$$\begin{aligned}t = 0 : \quad \theta &= \theta_0, \quad \omega = \omega_0 \\ (8.31) \\ \text{găsim următoarele legi ale mișcării circulare uniform variate:} \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{constant} \\ (8.32)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2, v = v_0 + a_0 t, a_\tau = a_0 = \text{constant}, a_D = \frac{(v_0 + a_0 t)^2}{R}, \\ \text{unde } s_0 &= R \theta_0, v_0 = R \omega_0, a_0 = R \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Observație: În practică se cunoaște de obicei turația (dată în rotații pe minut). Între turație (rot/min) și viteza unghiulară (rad/s) există relația :

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

(8.33)

8.4. Probleme rezolvate

R 8.1) Se dau ecuațiile parametrice ale mișcării unui punct material în coordonate carteziane :

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right), y = 5 \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) + 3, t_0 = 2$$

Se cere :

- Să se determine traiectoria punctului ;
- Să se determine componentele vitezei și accelerației punctului la un moment de timp arbitrar precum și modulele lor ;
- Să se determine raza de curbură a traiectoriei și componentele accelerației în coordonate intrinseci la momentul de timp t_0 indicat.

Rezolvare: a) Eliminând timpul între cele două ecuații parametrice obținem ecuația traiectoriei, $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$, care este ecuația unei elipse cu axele paralele cu Ox și Oy, centrul în A(0, 3) și de semiaxe 2 și 5 (figura R 8.1). Mobilul pleacă din punctul B(2, 3) și parcurge elipsa în sens trigonometric.

b) Componentele vitezei și accelerației în sistemul de coordonate carteziene sunt :

$$v_x = \dot{x} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} t, \quad v_y = \dot{y} = \frac{5\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} t$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{8} \cos \frac{\pi}{4} t, \quad a_y = \ddot{y} = -\frac{5\pi^2}{16} \sin \frac{\pi}{4} t$$

iar modulele lor :

$$v = \frac{\pi}{4} \sqrt{4 + 21 \cos^2 \frac{\pi}{4} t}, \quad a = \frac{\pi^2}{16} \sqrt{4 + 21 \sin^2 \frac{\pi}{4} t}$$

$$c) a_\tau = \dot{v} = -\frac{21\pi^2}{16} \frac{\sin \frac{\pi}{4} t \cos \frac{\pi}{4} t}{\sqrt{4 + 21 \cos^2 \frac{\pi}{4} t}}$$

Pentru $t_0 = 2$ s obținem $a_\tau = 0$ (m/s^2). La același moment de timp avem și $v = \frac{\pi}{2}$ (m/s), $a = \frac{5\pi^2}{16}$ (m/s^2). Pentru determinarea razei de curbura putem observa că :

$$a_v = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_v} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}$$

astfel încât pentru $t = 2$ s rezultă $\rho = \frac{4}{5} m$. În fine, componenta normală a accelerației este:

$$a_v = \frac{v^2}{\rho} = \frac{5\pi^2}{16} (m/s^2)$$

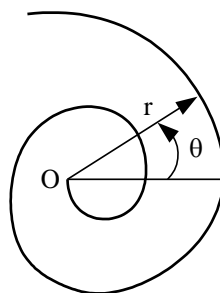
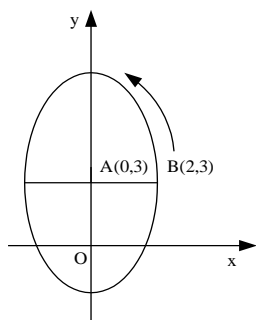


Figura R 8.1

Figura R 8.2

R 8.2) Un punct material se mișcă într-un plan, ecuațiile de mișcare în raport cu un sistem de coordonate polare fiind $r = 6t$, $\theta = 3t$. Să se stabilească traiectoria punctului precum și viteza și accelerația sa la momentul de timp $t_1 = 2\text{ s}$.

Rezolvare: Prin eliminarea timpului t între ecuațiile parametrice se obține ecuația traiectoriei în coordonate polare, $r = 2\theta$, care reprezintă spirala lui Arhimede (figura R 8.2).

Componentele vitezei și accelerației sunt:

$$v_r = \dot{r} = 6 \quad , \quad v_\theta = r\dot{\theta} = 18t \quad (m/s)$$

respectiv

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -54t \quad , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 36 \quad (m/s^2)$$

iar modulele lor:

$$\left| \vec{v} \right| = 6\sqrt{1+9t^2} \quad (m/s) \quad , \quad \left| \vec{a} \right| = 18\sqrt{4+9t^2} \quad (m/s^2).$$

Pentru $t_1 = 2\text{ s}$ se găsesc valorile:

$$v_r = 6\text{ m/s}, v_\theta = 36\text{ m/s}, a_r = -108\text{ m/s}^2, a_\theta = 36\text{ m/s}^2,$$

$$\left| \vec{v} \right| = 6\sqrt{37}\text{ m/s} \quad , \quad \left| \vec{a} \right| = 36\sqrt{10}\text{ m/s}^2.$$

R 8.3) Un mobil plecând din repaus se deplasează pe o dreaptă și în 60 s atinge viteza de 12 m/s într-o mișcare uniform accelerată. În continuare mobilul parcurge 720 m într-o mișcare uniformă. În fine, mobilul este frânat uniform și se oprește după ce parcurge distanța de 180 m. Să se studieze mișcarea și să se traseze diagramele mișcării $x = x(t)$, $v = v(t)$ și $a = a(t)$.

Rezolvare: **Etapa I :** *Mișcare rectilinie uniform accelerată*

$$x(t) = 0,12t^2 ; v(t) = 0,24t ; a(t) = 0,24 = \text{constant}$$

Mișcarea durează $t_1 = 50\text{ s}$ și se parcurge spațiul $x_1 = 300\text{ m}$.

Etapa a II – a : *Mișcare rectilinie uniformă*

$$x(t) = 300 + 12t ; v(t) = 12 = \text{constant} ; a(t) = 0$$

Mișcarea durează $t_2 = 60\text{ s}$ și se parcurge spațiul $x_2 = 720\text{ m}$.

Etapa a III – a : *Mișcare rectilinie uniform încetinită*

$$x(t) = 1020 + 12t - 0,2t^2 ; v(t) = 12 - 0,4t ; a(t) = -0,4 = \text{constant}$$

Mișcarea durează $t_3 = 30\text{ s}$ și se parcurge spațiul $x_3 = 180\text{ m}$.

Diagramele mișcării sunt prezentate în figura R 8.3.

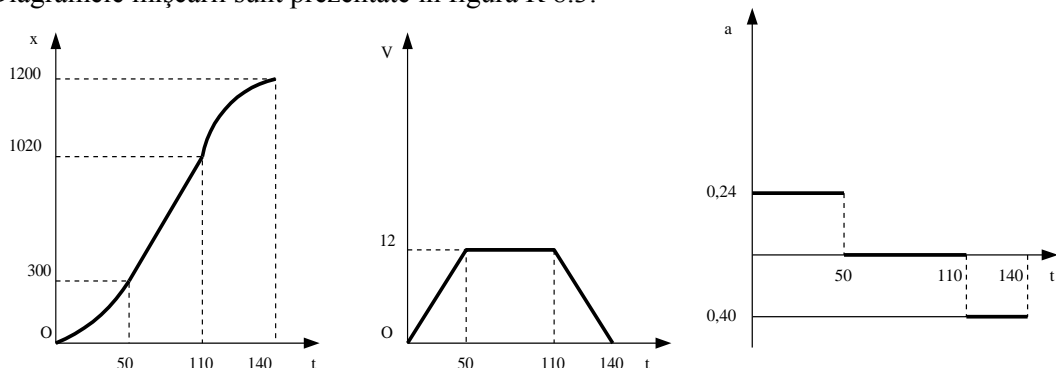


Figura R 8.3

R 8.4) Dintr-un punct al unui cerc de rază $R = 10$ m pleacă simultan, în sensuri opuse, două mobile având următoarele mișcări:

- primul se deplasează în sens trigonometric (sensul de creștere al arcului s) în conformitate cu legea orară $s_1 = -3t^2 + 30t$ (m);

- al doilea se deplasează în sens orar într-o mișcare circulară uniformă cu viteză $\left| \vec{v}_2 \right| = 4$ m/s.

Să se determine momentele de timp în care cele două mobile se întâlnesc prima și a doua oară.

Rezolvare: Fie A punctul de start al celor două mobile (figura R 8.4). Primul mobil se deplasează inițial în sens trigonometric dar nu își menține mult timp acest sens

de deplasare. Într-adevăr, viteza la un moment dat este $v_1 = \dot{s}_1 = -6t + 30$. Ea se anulează pentru $t = 5$ s și apoi devine negativă (mobilul se deplasează în sens orar). Accelerația tangențială constantă în mișcarea primului mobil este $a_{1\tau} = \ddot{s}_1 = -6$. În consecință,

pentru $t \in (0, 5)$ vectorii $\vec{a}_{1\tau}$ și \vec{v}_1 au sensuri contrare (mișcarea este uniform încetinită)

iar pentru $t \in (5, \infty)$ vectorii $\vec{a}_{1\tau}$ și \vec{v}_1 au același sens (mișcarea este uniform accelerată). Componenta normală a accelerației primului mobil este

$$a_{1\nu} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{(-6t + 30)^2}{10}.$$

Legea de mișcare a celui de-al doilea mobil este $s_2 = -\left| \vec{v}_2 \right| t = -4t$. Accelerația

tangențială este nulă, $a_{2\tau} = \ddot{s}_2 = 0$, iar cea normală este egală cu $a_{2\nu} = \frac{v_2^2}{R} = 1,6$ m/s².

Lungimea circumferinței cercului este $L = 2\pi R = 62,8\text{ m}$. Primul mobil străbate în $t = 5\text{ s}$ un spațiu $s_1 = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 = 75\text{ m}$ (mai mare decât circumferința) astfel încât prima întâlnire va avea loc atunci când $|s_1| + |s_2| = 2\pi R$, adică $-3t^2 + 30t + 4t = 62,8$. Soluția acceptabilă din punct de vedere fizic a acestei ecuații este $t' = \frac{7}{3} = 2,33\text{ s}$. Prima întâlnire are loc în punctul B (primul mobil a parcurs spațiul de 53,44 m iar al doilea 9,36 m).

În primele 5 secunde al doilea mobil străbate 20 m (în sens orar) și ajunge în C “iar primul mobil ajunge în C’ (arcu AC’ are $75 - 62,8 = 13,2\text{ m}$). Din acest moment ambele mobile se deplasează în sens orar iar pentru a doua întâlnire se pune condiția $s_1 = s_2$, adică $-3t^2 + 30t = -4t \Leftrightarrow t'' = \frac{64}{3} = 21,33\text{ s}$. La acest moment de timp mobilele se găsesc în punctul D (al doilea mobil a parcurs spațiul $|s_2| = 4t'' = 85,33\text{ m}$).

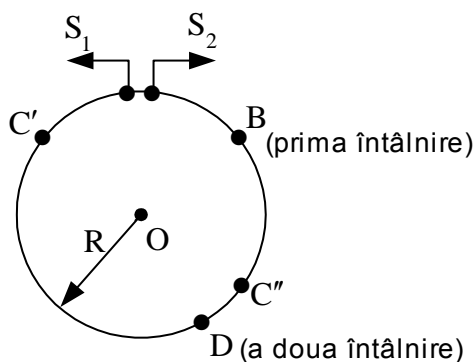


Figura R 8.4

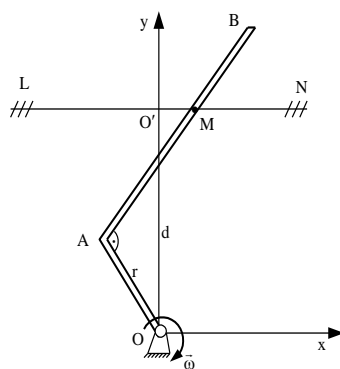


Figura R 8.5

R 8.5) O bară cotită OAB, în formă de unghi drept (figura R 8.5) , se rotește în planul său cu viteza unghiulară constantă ω în jurul punctului fix O . În același plan se află și dreapta fixă LN astfel încât $OO' = d$. Știind că $OA = r$, să se determine viteza și accelerația punctului M de-a lungul dreptei LN.

Rezolvare : Abscisa punctului M este :

$$x = O'M = AM' - OA' = MM' \operatorname{ctg} \varphi - OA' = (d - r \cos \varphi) \operatorname{ctg} \varphi - r \sin \varphi = \frac{d \cos \varphi - r}{\sin \varphi} ,$$

unde $\dot{\varphi} = -\omega$ (φ scade în timp) .

$$v = \dot{x} = \frac{d - r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \omega , \quad a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{2d \cos \varphi - r(1 + \cos^2 \varphi)}{\sin^3 \varphi} \cdot \omega^2$$

8.5. Probleme propuse

8.5.1. Teste clasice

TC 8.1) Se dau ecuațiile parametrice ale mișcării unui punct material în coordonate carteziane :

$$x = 2 - 3t - 6t^2 , y = 3 - \frac{3}{2}t - 3t^2 , t_0 = 1$$

Se cere :

- Să se determine traiectoria punctului ;
- Să se determine componentele vitezei și accelerației punctului la un moment de timp arbitrar precum și modulele lor ;
- Să se determine raza de curbura a traiectoriei și componentele accelerației în coordonate intrinseci la momentul de timp t_0 indicat.

TC 8.2) Un mobil se deplasează pe curba de ecuație $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, $x > 1$, la

momentul inițial găsimu-se în punctul A(1, 0) și având viteza nulă. Din acest moment el începe să execute o mișcare uniform accelerată până în punctul B, unde ajunge cu viteza $v_B = 15 \text{ m/s}$ după ce a parcurs spațiul $s_{AB} = 4\sqrt{3} \text{ m}$. Se cere:

- Accelerația mobilului în punctul B;
- Timpul t_1 cât durează parcurgerea spațiului s_{AB} .

TC 8.3) Ecuațiile parametrice ale mișcării unui punct material în coordonate polare sunt :

$$\rho = 2R \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}(1 - \sin \omega t)$$

unde R și ω sunt constante pozitive. Se cer :

a) Traectoria punctului ;

b) Poziția, viteza și accelerația punctului la momentul de timp $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$.

TC 8.4) Un punct se deplasează pe un cerc de rază $R = 10$ cm după legea $s = 5t^2 - 3t + 2$, unde s este dat în cm iar timpul t în secunde. Să se determine poziția punctului, componentele vectorului accelerație și unghiul format de vectorii viteză și accelerație la acel moment de timp t_1 la care modulul vitezei este $v_1 = 7$ cm / s.

8.5.2. Teste grilă

TG 8.1) O particulă P se deplasează cu viteza constantă V în lungul curbei de ecuație $y = \ln x$ (m). Pentru ce valoare a abscisei $x > 0$ accelerația particulei este maximă?

a) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ m ; b) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ m ; c) $x = 1$ m ; d) $x = \frac{1}{2}$ m .

TG 8.2) Un mobil plecând din repaus se deplasează pe o dreaptă într-o mișcare uniform accelerată. Știind că după $t_1 = 10$ s el atinge viteza $v_1 = 5$ m / s , ce spațiu străbătuse el după $t_0 = 1$ s ?

a) 0,5 m ; b) 0,25 m ; c) 1 m ; d) 0,75 m.

TG 8.3) Distanța $AB = 3$ m este parcursă de un automobil după cum urmează:

- prima treime, cu viteza constantă V_1 ;
- a doua treime, într-o mișcare uniform accelerată, viteza modificându-se de la V_1 la V_2 ;
- ultima treime, cu viteza constantă V_2 .

Să se determine viteza medie V_m a automobilului.

a) $V_m = \frac{V_1 + 2V_2}{3}$; b) $V_m = \frac{3V_1 V_2 (V_1 + V_2)}{V_1^2 + V_2^2 + 4V_1 V_2}$; c) $V_m = \frac{V_2 - V_1}{3}$;
d) $V_m = \frac{3V_1 V_2 (V_2 - V_1)}{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2}$.

TG 8.4) Acul unui ceas care indică minutele este de 1,5 ori mai lung decât acul care indică orele. Să se calculeze raportul dintre viteza liniară a vârfului acului care indică minutele și viteza liniară a vârfului acului care indică orele.

a) 21 ; b) 12 ; c) 15 ; d) 18.

8.6. Indicații și răspunsuri

TC 8.1) a) Dreapta $x - 2y + 4 = 0$. La $t = 0$ mobilul se găsește în A (2, 3) și se deplasează spre stânga.

b) $v_x = -3 - 12t$, $v_y = \frac{-3 - 12t}{2}$, $v = (3 + 12t) \frac{\sqrt{5}}{2}$, $a_x = -12$, $a_y = -6$, $a = 6\sqrt{5}$

c) Pentru $t_0 = 1$ se obțin valorile :

$$v = \frac{15\sqrt{5}}{2}, a = 6\sqrt{5}, a_v = 0, a_\tau = 6\sqrt{5}, \rho = \infty$$

Mobilul se găsește în punctul $B\left(-7, -\frac{3}{2}\right)$.

TC 8.2) a) $\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^v$, unde $a_B^\tau = \frac{v_B^2}{2s_{AB}} = \frac{75\sqrt{3}}{8} \text{ (m/s}^2\text{)}$ și

$$a_B^v = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{225}{49} \text{ (m/s}^2\text{)}, \text{ deoarece } \rho_B = \frac{[1 + (y'(x_B))^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''(x_B)|} = x_B^2 = 1 + s_{AB}^2.$$

b) $t_1 = \frac{v_B}{a_B^\tau} = \frac{8\sqrt{3}}{15} \text{ (s)}.$

TC 8.3) a) Deoarece $\sin \omega t \in [-1, 1]$, $\forall t > 0$, rezultă că $\theta \in [0, \pi]$, $\forall t > 0$. Dar $\rho = 2R =$ constant, astfel încât punctul se va mișca pe semicercul de rază $2R$ situat în semiplanul $y \geq 0$. Mișcarea este o mișcare oscilatorie pe acest semicerc.

b) $v_\rho = \dot{\rho} = 0$, $v_\theta = \rho \dot{\theta} = -\pi R \omega \cos \omega t$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -\frac{\pi^2 R \omega^2}{2} \cos^2 \omega t, \quad a_\theta = \rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta} = \pi R \omega^2 \sin \omega t$$

Pentru $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$ se obțin următoarele caracteristici cinematice :

Poziția : $\rho = 2R$, $\theta = 0$;

Viteza : $v_\rho = 0$, $v_\theta = 0$, $\left| \vec{v} \right| = 0$;

Acceleratia : $a_\rho = 0$, $a_\theta = \pi R \omega^2$, $\left| \vec{a} \right| = \pi R \omega^2$.

$$v = \dot{s} = 10t - 3, a_\tau = \dot{v} = 10$$

TC 8.4) $a_v = \frac{v^2}{R} = \frac{(10t - 3)^2}{10}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_v}{a_\tau} = \left(\frac{10t - 3}{10} \right)^2$

Pentru $v = v_1$ se obțin valorile :

$$t_1 = \frac{v_1 + 3}{10} = 1 \text{ s}, s_1 = s(t_1) = 4 \text{ cm}, \theta_1 = \frac{s_1}{R} = 0,4 \text{ rad}$$

$$v_1 = 7 \text{ cm/s}, a_{1\tau} = 10 \text{ cm/s}^2, a_{1\nu} = 4,9 \text{ cm/s}^2, a = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1\nu}^2}, \varphi_1 = \arctg 0,49$$

TG 8.1) Deoarece $a_p^\tau = \dot{v} = 0$ rezultă că $a_p = a_p^\nu = \frac{V^2}{\rho}$. Accelerația va fi maximă dacă raza de curbură va fi minimă, adică dacă $\rho'(x) = 0$. Se găsește $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Răspuns corect: **a**).

TG 8.2) Legile mișcării uniform accelerate sunt: $x = 0,25t^2, v = 0,5t, a = 0,5$. Pentru $t_0 = 1 \text{ s}$, se obține $x = 0,25 \text{ m}$. Răspuns corect : **b**).

TG 8.3) $V_m = \frac{AB}{t_1 + t_2 + t_3}$, unde $t_1 = \frac{1}{V_1}$ (timpul necesar parcurgerii primei treimi), $t_3 = \frac{1}{V_2}$ (timpul necesar parcurgerii ultimei treimi) și $t_2 = \frac{2}{V_1 + V_2}$ (timpul necesar parcurgerii treimii centrale). Răspuns corect: **b**).

TG 8.4) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1 \omega_1}{R_2 \omega_2} = \frac{12R_1}{R_2} = 18$, deoarece $\omega_1 = \frac{2\pi}{1}, \omega_2 = \frac{2\pi}{12}, \frac{R_1}{R_2} = 1,5$. Răspuns corect: **d**).

9. Cinematica mișcării absolute a solidului rigid

9.1. Mișcarea generală a rigidului

9.1.1. Parametrii de poziție ai rigidului

Mișcarea unui solid rigid este determinată atunci când sunt cunoscute în fiecare moment de timp vectorul de poziție, viteza și accelerația unui punct oarecare al rigidului în raport cu un reper fix $O_1x_1y_1z_1$.

Fie un reper cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ de versori $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ față de care este studiată mișcarea unui solid rigid (C) și $Oxyz$ un triedru cartezian mobil, solidar cu rigidul, de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (figura T 9.1). Alegerea punctului O ca origine a sistemului mobil este arbitrară.

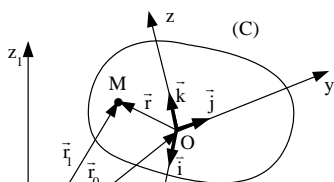


Figura T 9.1

Se consideră un punct arbitrar M având vectorul de poziție \vec{r}_1 față de reperul fix și \vec{r} față de cel mobil. Notând cu \vec{r}_0 vectorul de poziție al originii O a reperului mobil, putem scrie :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (9.1)$$

unde \vec{r}_1 , \vec{r}_0 și \vec{r} sunt funcții vectoriale de timp, presupuse continue, uniforme și de cel puțin două ori derivabile. Deoarece solidul este rigid, distanța OM este constantă în timpul mișcării astfel încât vectorul \vec{OM} va avea proiecțiile x, y, z pe axele reperului Oxyz constante. În schimb, versorii \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} sunt funcții de timp, axele reperului Oxyz putându-și schimba poziția în timpul mișcării rigidului. Rezultă :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (9.2)$$

unde $\vec{i} = \vec{i}(t)$, $\vec{j} = \vec{j}(t)$, $\vec{k} = \vec{k}(t)$. Pentru determinarea vectorului \vec{r}_1 este necesară cunoașterea funcțiilor vectoriale \vec{r}_0 , \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} . Fiecare din aceste funcții necesită cunoașterea a trei funcții scalare și anume proiecțiile funcțiilor vectoriale pe axele reperului Oxyz. Numărul necunoscutelor scalare este, în concluzie, de 12. Acestea nu sunt însă independente, între versorii axelor reperului mobil existând relațiile:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (9.3)$$

Rezultă că vectorul $\vec{r}_1(t)$ se exprimă numai cu ajutorul a șase funcții scalare de timp, trei dintre aceste funcții provin de la vectorul \vec{r}_0 , care definește poziția originii O a sistemului de referință mobil în raport cu cel fix. Celelalte trei funcții provin de la

versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ care dau orientarea sistemului mobil față de cel fix. Se obține astfel că un solid rigid liber în spațiu are șase grade de libertate.

Acești șase parametri scalari independenți pot fi aleși după cum urmează :

- coordonatele originii sistemului mobil în raport cu cel fix :

$$x_O = x_O(t) \quad , \quad y_O = y_O(t) \quad , \quad z_O = z_O(t)$$

- unghiurile lui Euler $\psi = \psi(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$, care dau orientarea axelor sistemului mobil față de cele ale sistemului mobil (vezi subcapitolul 9.5).

9.1.2. Distribuția de viteze

Din relațiile (9.1) și (9.2) se obține :

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_O(t) + x \cdot \vec{i}(t) + y \cdot \vec{j}(t) + z \cdot \vec{k}(t) \quad (9.4)$$

Pentru a determina viteza absolută a punctului M se derivează relația (9.4) în raport cu timpul :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_O(t) + \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_O(t) + x \cdot \dot{\vec{i}}(t) + y \cdot \dot{\vec{j}}(t) + z \cdot \dot{\vec{k}}(t) \quad (9.5)$$

unde $\vec{v}_O = \dot{\vec{r}}_O$ reprezintă viteza absolută a punctului O.

Pentru a înțelege semnificația derivatelor $\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}$ vom deriva relațiile (9.3) în raport cu timpul:

$$\dot{\vec{i}} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \dot{\vec{j}} = \vec{k} \cdot \dot{\vec{k}} = 0 \quad , \quad \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} + \vec{i} \cdot \dot{\vec{j}} = \vec{j} \cdot \dot{\vec{k}} + \vec{j} \cdot \dot{\vec{k}} = \vec{k} \cdot \dot{\vec{i}} + \vec{k} \cdot \dot{\vec{i}} = 0 \quad (9.6)$$

Notăm

$$\dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} = -\vec{j} \cdot \dot{\vec{k}} = \omega_x \quad , \quad \dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} = -\vec{k} \cdot \dot{\vec{i}} = \omega_y \quad , \quad \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} = -\vec{i} \cdot \dot{\vec{j}} = \omega_z \quad (9.7)$$

și considerăm scalarii $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ca fiind proiecțiile unui vector $\vec{\omega}$ pe axele reperului cartezian $Oxyz$, adică :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (9.8)$$

Semnificația acestui vector o vom descoperi mai târziu.

Se știe că proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre acel vector și versorul axei $\left(pr_{\Delta} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{\Delta} \right)$, astfel încât :

$$pr_{Ox} \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{i} = 0 \quad , \quad pr_{Oy} \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = \omega_z \quad , \quad pr_{Oz} \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = -\omega_y \quad (9.9)$$

$$\vec{i} = \omega_z \cdot \vec{j} - \omega_y \cdot \vec{k}$$

În plus,

$$\omega \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_z \cdot \vec{j} - \omega_y \cdot \vec{k} \quad (9.10)$$

Din (9.9) și (9.10) găsim că $\vec{i} = \omega \times \vec{i}$. Procedând analog pentru derivatele \vec{j}, \vec{k} obținem relațiile :

$$\vec{i} = \omega \times \vec{i} \quad , \quad \vec{j} = \omega \times \vec{j} \quad , \quad \vec{k} = \omega \times \vec{k} \quad (9.11)$$

cunoscute sub numele de **formulele lui Poisson** sau **ecuațiile de mișcare ale triedrului mobil**.

Înlocuind formulele lui Poisson în relația (9.5) găsim :

$$\vec{v} = \vec{v}_O + x \cdot \left(\omega \times \vec{i} \right) + y \cdot \left(\omega \times \vec{j} \right) + z \cdot \left(\omega \times \vec{k} \right) = \vec{v}_O + \omega \times \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \right)$$

adică

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \omega \times \vec{r} \quad (9.12)$$

Relația (9.12) reprezintă formula pentru determinarea distribuției de viteze în mișcarea generală a rigidului (**formula lui Euler pentru distribuția de viteze**), \vec{v} reprezintă viteza punctului arbitrar M al rigidului, \vec{v}_O viteza originii triedrului mobil, ω este vectorul definit de relația (9.8) iar \vec{r} vectorul de poziție al punctului M în raport cu triedrul mobil. Comparând relațiile (9.5) și (9.12) obținem că :

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ r = \omega \times r \end{array}$$

(9.13)

Proiectând relația (9.12) pe axele triedrului mobil $Oxyz$ se obțin expresiile componentelor vitezei punctului arbitrar M al rigidului :

$$v_x = v_{Ox} + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \quad v_y = v_{Oy} + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \quad v_z = v_{Oz} + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x$$

(9.14)

9.1.3. Distribuția de accelerații

Derivând relația (9.12) în raport cu timpul se obține accelerația absolută a punctului M:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ a = v = v_O + \omega \times r + \omega \times r \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \rightarrow \text{ not } \rightarrow \end{array} \quad \text{Dar } v_O = a_O \text{ reprezintă accelerația originii O a triedrului mobil, } \begin{array}{c} \bullet \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ r = \omega \times r \end{array}$$

iar $\omega = \varepsilon$ va fi o mărime vectorială a cărei semnificație o vom discuta mai târziu. Se obține astfel formula care dă distribuția de accelerații în mișcarea generală a solidului rigid (**formula lui Euler pentru distribuția de accelerații**) :

$$\begin{array}{c} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ a = a_O + \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) \end{array}$$

(9.15)

Proiectând relația (9.15) pe axele triedrului mobil $Oxyz$ se obțin componentele accelerației punctului arbitrar M al rigidului :

$$a_x = a_{Ox} + (\varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y) + (\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z) \cdot \omega_x - \omega^2 \cdot x$$

$$a_y = a_{Oy} + (\varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z) + (\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z) \cdot \omega_y - \omega^2 \cdot y$$

(9.16)

$$a_z = a_{Oz} + (\varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x) + (\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z) \cdot \omega_z - \omega^2 \cdot z$$

$$\text{unde } \omega = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad \varepsilon = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k} \text{ si } \omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2.$$

9.1.4. Proprietăți ale distribuției de viteze în mișcarea generală a solidului rigid

Mișcarea generală a rigidului se caracterizează prin următoarele proprietăți ale distribuției de viteze (fără demonstrație):

P 1) Vectorul $\vec{\omega}$ este un invariant față de schimbarea originii O a triedrului mobil (analog vectorul $\vec{\varepsilon}$);

P 2) Produsul scalar dintre vectorul viteză \vec{v} al unui punct arbitrar M al rigidului și vectorul $\vec{\omega}$ este invariant (nu depinde de punctul M)

$$\vec{v} \cdot \vec{\omega} = \text{constant} \quad (9.17)$$

P 3) Proiecțiile vitezelor punctelor unui rigid pe direcția vectorului $\vec{\omega}$ sunt egale :

$$pr_{\vec{\omega}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \text{constant} \quad (9.18)$$

P 4) Punctele aflate pe o dreaptă paralelă cu vectorul $\vec{\omega}$ au viteze egale.

P 5) Proiecțiile punctelor oarecare M și N ale unui rigid pe segmentul care le unește sunt egale :

$$pr_{MN} \vec{v}_M = pr_{MN} \vec{v}_N \quad (9.19)$$

P 6) Extremitățile vitezelor punctelor unui segment al solidului rigid sunt puncte coliniare.

9.2. Mișcări particulare ale solidului rigid

Se numesc mișcări particulare ale rigidului acele mișcări în care, fie datorită modului de acțiune a sistemului de forțe fie datorită unor legături, o parte a celor șase parametri de poziție ai rigidului rămân constanți în timpul mișcării. Vom aborda în cele ce urmează un număr de cinci mișcări particulare ale rigidului.

9.2.1. Mișcarea de translație a rigidului

Un rigid efectuează o mișcare de translație dacă orice dreaptă solidară cu rigidul rămâne paralelă cu ea însăși în tot timpul mișcării.

Translațiile rigidului pot fi rectilinii, circulare sau arbitrare. Exemple de corpuri ce execută translații sunt : caroseria unui autovehicul pe un drum rectiliniu, pedala de acționare a bicicletei, biela de cuplare a două roți de raze egale etc.

În mișcarea de translație traiectoriile punctelor rigidului sunt curbe identice ce pot fi suprapuse printr-o translație geometrică de vector $\vec{r} = \vec{AB}$ (figura T 9.2).

Conform definiției, axele triedrului mobil $Oxyz$ (solidar cu rigidul) rămân paralele cu ele însele în timpul mișcării. Rezultă :

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \text{constant} \Rightarrow \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = 0 \Rightarrow \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \Rightarrow$$

(9.20)

$$\vec{\omega} = 0$$

,

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0$$

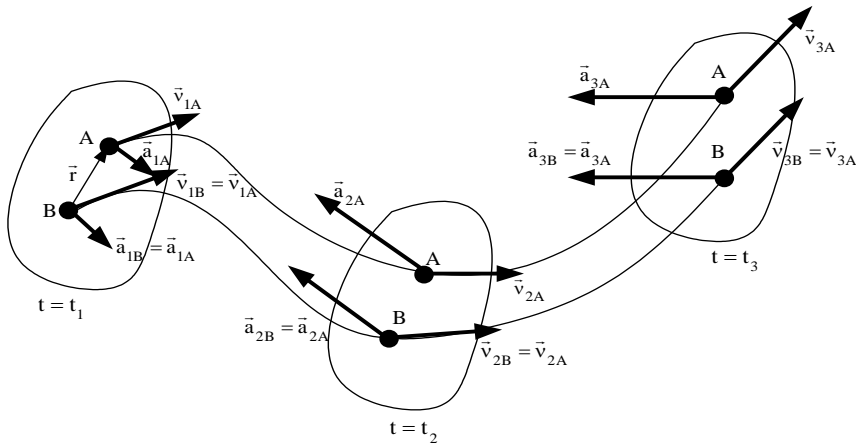


Figura T 9.2

Din formulele lui Euler (9.12) și (9.15) găsim că :

$$\vec{v} = \vec{v}_O \quad , \quad \vec{a} = \vec{a}_O$$

(9.21)

ceea ce înseamnă că la un moment dat toate punctele rigidului au aceeași viteză și aceeași accelerație, fiind suficientă cunoașterea mișcării unui singur punct al rigidului pentru a cunoaște mișcarea tuturor punctelor rigidului (vezi figura T 9.2).

Un solid rigid aflat în mișcare de translație are trei grade de libertate (deplasări în lungul axelor de coordonate).

9.2.2. Mișcarea de rotație a rigidului

9.2.2.1. Generalități

Un rigid efectuează o mișcare de rotație dacă în tot timpul mișcării două puncte ale sale rămân fixe în spațiu.

Dreapta (Δ) determinată de cele două puncte fixe este, de asemenea, fixă și se numește *axă de rotație*. Exemple de corpuri având mișcări de rotație sunt : rotorul unei mașini electrice, universalul unui strung, roata unui polizor etc. Un punct arbitrar M al rigidului, nesituat pe axa de rotație, descrie o mișcare circulară pe un cerc aflat într-un plan perpendicular pe axa de rotație, cu centrul pe axa de rotație și de rază egală cu distanța de la punct la axă (figura T 9.3).

Pentru studiul mișcării de rotație se alege un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ și un triedru mobil $Oxyz$, solidar cu rigidul, astfel încât $O \equiv O_1, Oz \equiv O_1z_1 = (\Delta)$. Unghiul dintre axele

Ox și O_1x_1 (sau Oy și O_1y_1) se notează cu θ și reprezintă parametrul scalar care fixează poziția rigidului la un moment dat. În consecință, în mișcarea de rotație solidul rigid are un singur grad de libertate. Ecuația de mișcare a rigidului este:

$$\theta = \theta(t)$$

(9.22)

Deoarece $O \in (\Delta)$ rezultă că :

$$\vec{v}_O = \vec{0} \quad , \quad \vec{a}_O = \vec{0}$$

(9.23)

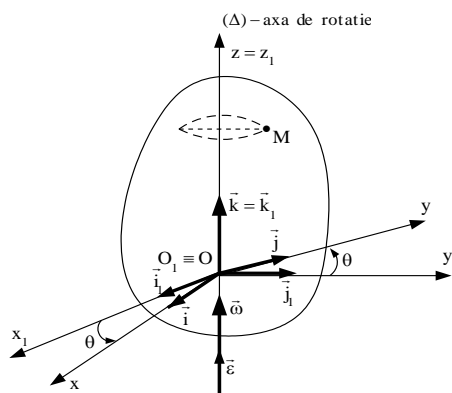


Figura T 9.3

Pentru determinarea vectorilor $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ se exprimă versorii axelor reperului mobil în funcție de cei ai reperului fix (vezi figura T 9.3) :

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \cdot \vec{i}_1 + \sin \theta \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{j} = -\sin \theta \cdot \vec{i}_1 + \cos \theta \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{k} = \vec{k}_1 \end{cases}$$

(9.24)

Derivând relațiile (9.24) în raport cu timpul t obținem :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{i}} = \left(-\sin \theta \cdot \vec{i}_1 + \cos \theta \cdot \vec{j}_1 \right) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \vec{j} \\ \dot{\vec{j}} = \left(-\cos \theta \cdot \vec{i}_1 - \sin \theta \cdot \vec{j}_1 \right) \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{i} \\ \dot{\vec{k}} = \vec{k}_1 = 0 \end{array} \right.$$

(9.25)

de unde :

$$\omega_x = \dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} = -\dot{\theta} \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \omega_y = \dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} = 0, \omega_z = \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} = \dot{\theta} \vec{j} \cdot \vec{j} = \dot{\theta}$$

(9.26)

Rezultă :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \cdot \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\theta} \cdot \vec{k}, \quad \omega = \dot{\theta}, \quad \varepsilon = \ddot{\theta}$$

(9.27)

Vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ au direcția axei de rotație iar scalarii lor se obțin derivând funcția $\theta(t)$ care descrie mișcarea rigidului. Deoarece scalarul vectorului $\vec{\omega}$ este dat prin $\dot{\theta}$, la fel ca la mișcarea circulară a punctului material, acest vector se va numi *vector viteză unghiulară* și va caracteriza variația unghiului θ . În mod identic, vectorul $\vec{\varepsilon}$ se va numi *vector accelerație unghiulară*.

9.2.2.2. Studiul distribuției de viteze

Din (9.12) și (9.23) obținem pentru viteza unui punct arbitrar M(x, y, z) al rigidului aflat în mișcare de rotație expresia :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

(9.28)

Proiecțiile vectorului viteză și modulul său sunt :

$$v_x = -\omega y \quad , \quad v_y = \omega x \quad , \quad v_z = 0 \quad , \quad v = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega d \quad (9.29)$$

unde d este distanța de la punctul M la axa de rotație.

Proprietățile câmpului de viteze pot fi puse în evidență considerând punctele $A_1(x_1,0,0)$, $A_2(x_2,0,0)$, $A_3(x_3,0,0)$ situate arbitrar pe o perpendiculară pe axa de rotație (figura T 9.4). Vitezele acestor puncte fiind :

$$\vec{v}_{A_1} = \omega x_1 \vec{j} \quad , \quad \vec{v}_{A_2} = \omega x_2 \vec{j} \quad , \quad \vec{v}_{A_3} = \omega x_3 \vec{j}$$

se pot deduce următoarele proprietăți:

- i) Singurele puncte de viteză nulă aparțin axei de rotație;
- ii) Vitezele diferitelor puncte ale rigidului sunt conținute în plane perpendiculare pe axa de rotație ;
- iii) Punctele aparținând unei drepte paralele cu axa de rotație au viteze identice ;
- iv) Vitezele punctelor situate pe o dreaptă perpendiculară pe axa de rotație sunt perpendiculare pe această dreaptă, modulele lor fiind direct proporționale cu distanța de la punct la axa de rotație.

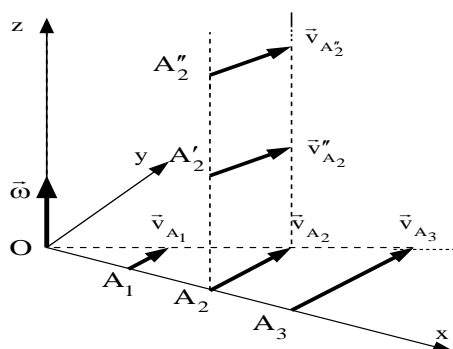


Figura T 9.4

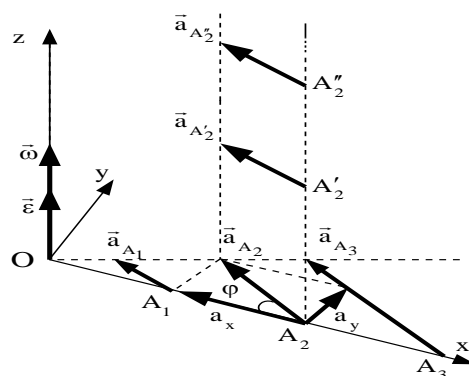


Figura T 9.5

9.2.2.3. Studiul distribuției de accelerații

Din (9.15) și (9.23) se obține pentru accelerația unui punct arbitrar $M(x, y, z)$ al rigidului următoarea expresie analitică :

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \omega \times (\omega \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= (-y\varepsilon - x\omega^2)\vec{i} + (x\varepsilon - y\omega^2)\vec{j}
 \end{aligned}
 \tag{9.30}$$

Proiecțiile vectorului accelerație și modulul său sunt :

$$a_x = -y\varepsilon - x\omega^2, a_y = x\varepsilon - y\omega^2, a_z = 0, a = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}
 \tag{9.31}$$

Proprietățile câmpului de accelerații (figura T 9.5) se pun în evidență tot cu ajutorul punctelor $A_1(x_1, 0, 0)$, $A_2(x_2, 0, 0)$, $A_3(x_3, 0, 0)$ pentru care avem :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{A_1} &= -x_1\omega^2\vec{i} + x_1\varepsilon\vec{j}, & \vec{a}_{A_2} &= -x_2\omega^2\vec{i} + x_2\varepsilon\vec{j}, \\
 \vec{a}_{A_3} &= -x_3\omega^2\vec{i} + x_3\varepsilon\vec{j} \\
 \left| \vec{a}_{A_1} \right| &= |x_1|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \left| \vec{a}_{A_2} \right| = |x_2|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \left| \vec{a}_{A_3} \right| = |x_3|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{a_y}{a_x} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \text{constant}
 \end{aligned}
 \tag{9.32}$$

Proprietățile distribuției de accelerații sunt identice celor pentru distribuția de viteze cu singura deosebire că accelerațiile sunt înclinate față de o perpendiculară pe axa de rotație cu același unghi φ (dat de relația (9.32)).

9.2.3. Mișcarea elicoidală a rigidului

9.2.3.1. Generalități

Un rigid are o mișcare elicoidală dacă în tot timpul mișcării două puncte ale sale rămân pe o dreaptă fixă în spațiu, numită axa mișcării elicoidale.

Drept exemple de rigide care efectuează o mișcare elicoidală amintim: un burghiu în timpul operației de găurire cu avansul manual, un glonte în interiorul țevii unei arme ghintuite, un șurub etc.

Pentru studiul mișcării elicoidale se aleg două triedre și anume triedrul fix $O_1x_1y_1z_1$ și triedrul mobil $Oxyz$, solidar cu rigidul, astfel încât $O_1z_1 \equiv Oz \equiv \Delta$ (axa mișcării elicoidale). Originea O a triedrului mobil se mișcă pe axa fixa O_1z_1 (figura

T9.6). La momentul inițial ($t=0$) se poate considera că $O \equiv O_1$. În mișcarea elicoidală rigidul are doar două grade de libertate, deoarece legăturile sale permit o translație în lungul axei (Δ) și o rotație în jurul aceleiași axe. Mișcarea rigidului va fi o suprapunere de două mișcări independente simultane, parametrii mișcării fiind cota $z_O = z_O(t)$ a punctului O față de triedrul fix și unghiul $\theta = \theta(t)$ dintre axele O_1x_1 și Ox (sau O_1y_1 și Oy).

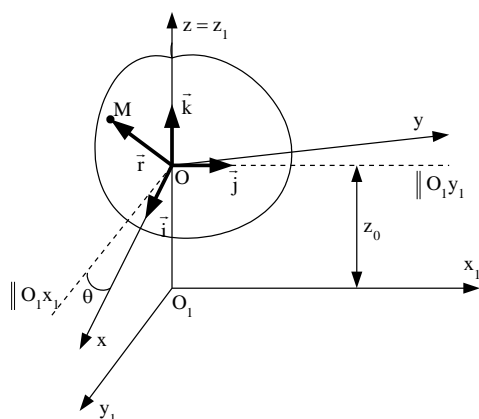


Figura T 9.6

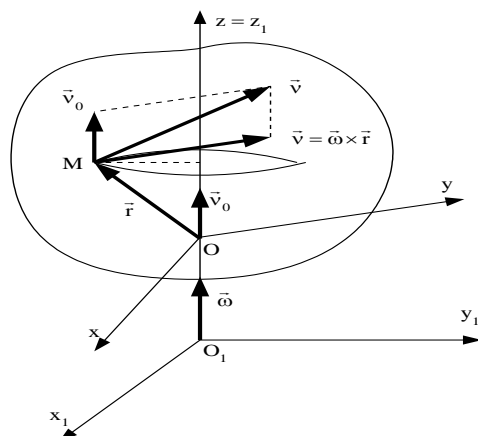


Figura T 9.7

Deoarece originea O a sistemului mobil are o mișcare rectilinie pe O_1z_1 , putem scrie :

$$\vec{v}_O = \dot{z}_O \vec{k} = v_O \vec{k} \quad , \quad \vec{a}_O = \ddot{z}_O \vec{k} = a_O \vec{k} \quad (9.33)$$

Planul Oxy rămâne paralel în tot timpul mișcării cu planul $O_1x_1y_1$, astfel încât versorii \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} ai triedrului mobil au aceleași expresii și derivate ca la mișcarea de rotație.

Prin urmare :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} = \omega \vec{k} \quad , \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\theta} \vec{k} = \varepsilon \vec{k} \quad (9.34)$$

9.2.3.2. Studiul distribuției de viteze

Distribuția de viteze în mișcarea elicoidală se obține cu ajutorul formulei generale (9.12) care, în acest caz, devine :

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} + v_O \vec{k}$$

(9.35)

Proiecțiile vectorului viteză pe axele reperului mobil și modulul său sunt :

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = v_O, \quad v = \sqrt{v_O^2 + \omega^2(x^2 + y^2)}$$

(9.36)

Se poate observa (vezi și subcapitolul 9.2.2) că distribuția de viteze se obține prin suprapunerea a două câmpuri de viteze : primul corespunzător unei rotații în jurul axei Oz

cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ și altul specific unei translații în lungul axei Oz cu viteza \vec{v}_O (figura T 9.7). Proprietățile distribuției de viteze sunt :

- i) Nu există în general puncte de viteză nulă. Punctele de viteză minimă (egală cu v_O) aparțin axei mișcării elicoidale ;
- ii) Punctele rigidului situate pe o paralelă la axa mișcării elicoidale au aceeași viteză ;
- iii) Punctele rigidului aparținând unei perpendiculare pe axa mișcării elicoidale au modulele vitezelor direct proporționale cu distanța de la punct la axa (Δ).

9.2.3.3. Studiul distribuției de accelerații

Utilizând formula generală (9.15) și relațiile (9.33-9.34) obținem :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{a}_O + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-y\varepsilon - x\omega^2)\vec{i} + (x\varepsilon - y\omega^2)\vec{j} + a_O\vec{k} \end{aligned}$$

(9.37)

Componentele pe axe și modulul accelerației punctului arbitrar M(x, y, z) sunt :

$$a_x = -y\varepsilon - x\omega^2, a_y = x\varepsilon - y\omega^2, a_z = a_O, a = \sqrt{a_O^2 + (\omega^4 + \varepsilon^2)(x^2 + y^2)}$$

(9.38)

Distribuția de accelerații rezultă tot ca o suprapunere de câmpuri de vectori (accelerație), primul corespunzător unei rotații în jurul axei Oz cu accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ și al doilea specific unei translații în lungul lui Oz , cu accelerația \vec{a}_O . Proprietățile distribuției de accelerație sunt analoage cu cele ale distribuției de viteze.

9.2.3.4. Caz particular : mișcarea de șurub

Un caz particular al mișcării elicoidale, foarte întâlnit în tehnică, este acela al *mișcării de șurub*. Particularitatea constă în faptul că la o rotație completă a rigidului acesta înaintează cu un pas constant p . Există astfel o dependență de tipul :

$$z_O(t) = k \cdot \theta(t)$$

(9.39)

între cei doi parametri ce caracterizează mișcarea elicoidală, rigidul având doar un singur grad de libertate. Impunând condiția :

$$\theta = 2\pi \quad : \quad z_O = p$$

(9.40)

se obține $k = \frac{p}{2\pi}$. În urma unor derivări succesive ale relației (9.39) rezultă următoarele relații de legătură între elementele cinematice :

$$v_O = \frac{p}{2\pi} \omega \quad , \quad a_O = \frac{p}{2\pi} \varepsilon$$

(9.41)

9.2.4. Mișcarea plan – paralelă a rigidului

9.2.4.1. Generalități

Un rigid are o mișcare plan – paralelă dacă în tot timpul mișcării trei puncte necoliniare ale sale rămân într-un plan fix din spațiu. Planul determinat de cele trei puncte și legat de rigid rămâne de asemenea în planul fix.

Exemple de mișcări care efectuează mișcări plan-paralele sunt : biela unui motor, roata unui vehicul care se deplasează pe un drum drept etc. Din considerente geometrice rezultă că toate punctele rigidului au traiectorii conținute în plane paralele cu cel fix. Orice punct al rigidului rămâne la distanță constantă de planul fix și are aceeași mișcare ca și proiecția lui pe planul fix. Va fi suficient să se determine mișcarea punctelor rigidului din planul fix pentru a se cunoaște mișcarea tuturor punctelor rigidului.

Pentru studiul mișcării plan-paralele se consideră triedrul fix $O_1x_1y_1z_1$ pentru care planul $O_1x_1y_1$ este chiar planul fix și triedrul mobil $Oxyz$, solidar cu rigidul, la care planul Oxy este invariabil legat de secțiunea determinată în rigid de planul fix (figura T9.9). Poziția rigidului la un moment dat este complet determinată de cunoașterea coordonatelor originii O a reperului mobil și de unghiul θ dintre axele Ox și O_1x_1 (sau Oy și O_1y_1), adică de funcțiile:

$$x_{1O} = x_{1O}(t) \quad , \quad y_{1O} = y_{1O}(t) \quad , \quad \theta = \theta(t)$$

(9.42)

Rezultă că în mișcarea plan-paralelă rigidul are trei grade de libertate.

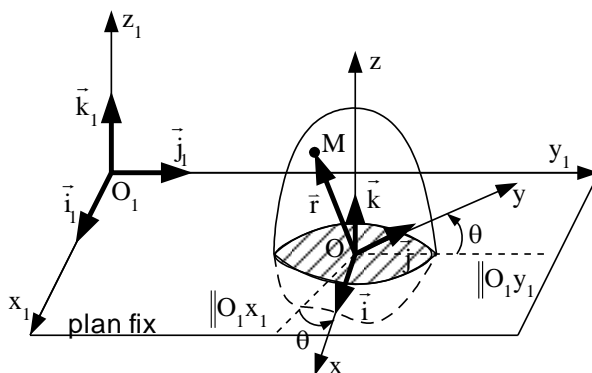


Figura T 9.9

Deoarece punctul O se mișcă doar în planul Oxy (sau $O_1x_1y_1$) vectorii viteză

\vec{v}_O și accelerație \vec{a}_O au componente doar în acest plan :

$$\begin{aligned}\vec{v}_O &= \dot{x}_{1O} \vec{i}_1 + \dot{y}_{1O} \vec{j}_1 = v_{Ox} \vec{i} + v_{Oy} \vec{j} \\ \vec{a}_O &= \ddot{x}_{1O} \vec{i}_1 + \ddot{y}_{1O} \vec{j}_1 = a_{Ox} \vec{i} + a_{Oy} \vec{j}\end{aligned}\quad (9.43)$$

Observație : $v_{Ox} \neq \dot{x}_{1O}, v_{Oy} \neq \dot{y}_{1O}, a_{Ox} \neq \ddot{x}_{1O}, a_{Oy} \neq \ddot{y}_{1O}$, deoarece în (9.43) apar proiecții pe două triedre diferite.

Proiecțiile versorilor \vec{i}, \vec{j} și \vec{k} pe axele reperului fix $O_1x_1y_1z_1$ rămân aceleași ca la mișcarea de rotație astfel încât :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} = \omega \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\theta} \vec{k} = \varepsilon \vec{k}\quad (9.44)$$

9.2.4.2. Studiul distribuției de viteze

Ținând cont de formula generală (9.12) și de relațiile (9.43) și (9.44) se obține următoarea expresie analitică pentru viteza punctului arbitrar M(x, y, z) :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} = v_{Ox} \vec{i} + v_{Oy} \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (v_{Ox} - \omega y) \vec{i} + (v_{Oy} + \omega x) \vec{j} \end{aligned}$$

(9.45)

Proiecțiile pe axe ale vitezei punctului M sunt :

$$v_x = v_{Ox} - \omega y, \quad v_y = v_{Oy} + \omega x, \quad v_z = 0$$

(9.46)

Orice punct al rigidului are viteza cuprinsă într-un plan paralel cu planul Oxy.

Distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă a rigidului are următoarele proprietăți :

i) *Există, în general, puncte de viteză nulă.* Notând prin ξ, η, ζ coordonatele unui astfel de punct și egalând cu zero componentele vitezei date de (9.46) obținem :

$$\xi = -\frac{v_{Oy}}{\omega}, \quad \eta = \frac{v_{Ox}}{\omega}, \quad \zeta = \text{arbitrar}$$

(9.47)

Relațiile (9.47) reprezintă ecuațiile parametrice ale unei drepte perpendiculare pe planul Oxy și care se numește *axă instantanee de rotație*. Punctul $I(\xi, \eta, 0)$ de intersecție între această dreaptă și planul Oxy se numește *centrul instantaneu de rotație* (CIR) și este singurul punct din planul Oxy care are viteză nulă la un moment dat.

Centrul instantaneu de rotație (CIR – ul) este un punct variabil atât față de triedrul fix $O_1x_1y_1z_1$ cât și față de triedrul mobil Oxyz. Mereu alt punct al rigidului are viteză nulă și devine CIR. Locul geometric al CIR-ului în raport cu triedrul fix este o curbă numită *bază* (sau *centroidă fixă*) iar locul geometric al CIR-ului față de triedrul mobil este o curbă numită *rostogolitoare* (sau *centroidă mobilă*). Se poate demonstra că, în timpul mișcării rigidului, centroida mobilă se rostogolește peste cea fixă, cele două curbe fiind tangente în CIR – ul corespunzător momentului respectiv.

În spațiu, axa instantanee de rotație generează două suprafețe cilindrice în raport cu triedrele fix și mobil, numite respectiv *axoidă fixă* și *axoidă mobilă*. Suprafața mobilă se rostogolește fără să alunece peste cea fixă, având în comun la fiecare moment de timp axa instantanee de rotație.

ii) *Distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă este identică cu cea de la mișcarea de rotație, ca și când solidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație cu viteza*

unghiulară $\vec{\omega}$.

Într-adevăr, considerând că la momentul de timp respectiv originea O a triedrului mobil coincide cu CIR – ul ($O \equiv I$), viteza punctului M va fi

$\vec{v}_M = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \vec{IM} = \vec{\omega} \times \vec{IM}$ (deoarece $\vec{v}_I = 0$), identică cu cea de la mișcarea de rotație în jurul lui I.

9.2.4.3. Studiul distribuției de accelerații

Accelerația punctului arbitrar $M(x, y, z)$ rezultă pe baza formulei generale (9.15) și a relațiilor (9.43) și (9.44) :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_O + \varepsilon \times \vec{r} + \omega \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) = a_{Ox} \vec{i} + a_{Oy} \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (a_{Ox} - \varepsilon y - \omega^2 x) \vec{i} + (a_{Oy} + \varepsilon x - \omega^2 y) \vec{j} \end{aligned} \quad (9.48)$$

Proiecțiile vectorului accelerație pe axele reperului $Oxyz$ sunt :

$$a_x = a_{Ox} - \varepsilon y - \omega^2 x, \quad a_y = a_{Oy} + \varepsilon x - \omega^2 y, \quad a_z = 0 \quad (9.49)$$

Orice punct al rigidului are accelerația cuprinsă într-un plan paralel cu planul Oxy . Distribuția de accelerații în mișcarea plan-paralelă a rigidului are următoarele proprietăți :

i) *Există, în general, puncte de accelerație nulă.* Notând prin ξ', η', ζ' coordonatele unui astfel de punct, prin egalarea cu zero a componentelor accelerației se obține :

$$\xi' = \frac{\omega^2 a_{Ox} - \varepsilon a_{Oy}}{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad \eta' = \frac{\varepsilon a_{Ox} + \omega^2 a_{Oy}}{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad \zeta' = 0 \quad (9.50)$$

Relațiile (9.50) reprezintă ecuațiile parametrice ale unei drepte perpendiculare pe planul Oxy , în punctele căreia accelerațiile sunt nule la momentul de timp dat. Intersecția acestei drepte cu planul Oxy este punctul $J(\xi', \eta', 0)$, numit *polul accelerațiilor*. El este singurul punct de accelerație nulă din planul fix la un moment dat.

ii) *Distribuția de accelerații în mișcarea plan-paralelă este identică cu cea din mișcarea de rotație, ca și când rigidul s-ar roti în jurul unei axe normale pe planul fix și care trece prin polul accelerațiilor.*

Într-adevăr, dacă se consideră la acel moment de timp că originea O a triedrului mobil coincide cu J ($O \equiv J$), atunci accelerația punctului M va fi :

$$\vec{a}_M = \vec{a}_J + \varepsilon \times \vec{JM} + \omega \times \left(\vec{\omega} \times \vec{JM} \right) = \varepsilon \times \vec{JM} + \omega \times \left(\vec{\omega} \times \vec{JM} \right)$$

(deoarece $\vec{a}_J = 0$), identică cu cea de la mișcarea de rotație în jurul lui J .

Observație : CIR – ul I și polul accelerațiilor J sunt puncte diferite la un moment dat

$$\left(\vec{v}_I = 0 \text{ dar } \vec{v}_J \neq 0 \text{ si } \vec{a}_J = 0 \text{ dar } \vec{a}_I \neq 0 \right).$$

9.2.5. Mișcarea sferică a rigidului

9.2.5.1. Generalități

Un rigid are o mișcare sferică atunci când un punct al său rămâne tot timpul mișcării confundat cu un punct fix din spațiu.

Din considerații geometrice rezultă că toate punctele rigidului au traiectorii conținute pe sfere având centrul în punctul fix și raza egală cu distanța de la punctul corespunzător la punctul fix.

Exemple de solide rigide având o mișcare sferică sunt giroscopul, mișcarea unui aparat articulat sferic pe un trepid etc.

Pentru studiul mișcării se aleg două repere și anume unul fix $O_1x_1y_1z_1$ și unul mobil $Oxyz$, solidar cu rigidul, astfel încât originile O_1 și O să fie confundate cu punctul fix (figura T 9.10). Poziția rigidului este complet determinată la un moment dat prin unghiurile lui Euler ψ, φ, θ (definite în cele ce urmează), astfel încât în mișcarea sferică rigidul are trei grade de libertate.

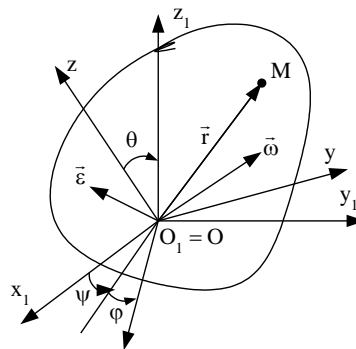


Figura T 9.10

Intersecția planelor Oxy și $O_1x_1y_1$ este dreapta ON , numită *linia nodurilor*. Unghiurile lui Euler sunt independente între ele și sunt definite astfel:

- unghiul de precesie ψ , format de linia nodurilor cu axa O_1x_1 ;
- unghiul de rotație proprie φ , format de Ox cu linia nodurilor;
- unghiul de nutație θ , format de Oz cu O_1z_1 .

Deoarece originea O a reperului mobil este fixă rezultă că :

$$\vec{v}_O = \vec{a}_O = \vec{0}$$

(9.51)

Vectorul $\vec{\omega}$ și vectorul $\vec{\varepsilon}$ au componente pe toate axele triedrului mobil (vezi capitolul 15), expresiile lor analitice fiind de forma :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k}$$

(9.52)

9.2.5.2. Studiul distribuției de viteze

Viteza punctului arbitrar $M(x, y, z)$, dată de (9.12), (9.51) și (9.52), este :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\vec{v} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}$$

(9.53)

Proiecțiile pe axe ale reperului mobil ale vitezei punctului M sunt :

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x$$

(9.54)

Distribuția de viteze în mișcarea sferică are următoarele proprietăți :

i) *Există, în general, puncte de viteză nulă.* Egalând cu zero componentele vitezei, date de (9.54), se obține un sistem linear omogen în necunoscutele x, y, z , care este compatibil simplu nedeterminat și are soluția dată prin $x = \lambda \omega_x, y = \lambda \omega_y, z = \lambda \omega_z, \lambda \in \mathbb{R}$, ce poate fi pusă sub forma:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

(9.55)

Punctele de viteză nulă se află pe o dreaptă ce conține punctul fix $O(0, 0, 0)$ și care are direcția vectorului $\vec{\omega}$ (parametri directori $\omega_x, \omega_y, \omega_z$). Această dreaptă poartă numele de *axă instantanee de rotație* și este o dreaptă variabilă în timp deoarece $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Locul geometric al axei instantanee de rotație în raport cu triedrul fix este o suprafață conică cu vârful în O_1 , numită *con herpolodic* iar locul geometric al axei instantanee de rotație în raport cu triedrul mobil este o suprafață conică cu vârful în O și numită *con polodic*. În timpul mișcării conul herpolodic rămâne fix iar conul polodic se rostogolește fără să alunece peste conul herpolodic.

ii) *Distribuția de viteze este identică cu cea din cazul mișcării de rotație, ca și când rigidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație (vezi relația (9.53)).*

9.2.5.3. Studiul distribuției de accelerații

Utilizând formula generală (9.15) și relațiile (9.51) și (9.52) se obțin următoarele proiecții pentru accelerația punctului $M(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
a_x &= -\left(\omega_y^2 + \omega_z^2\right)x + \left(\omega_y\omega_z - \varepsilon_x\right)y + \left(\omega_x\omega_z + \varepsilon_y\right)z \\
a_y &= \left(\omega_y\omega_x + \varepsilon_z\right)x - \left(\omega_x^2 + \omega_z^2\right)y + \left(\omega_y\omega_z - \varepsilon_x\right)z \\
a_z &= \left(\omega_z\omega_x - \varepsilon_y\right)x + \left(\omega_z\omega_y + \varepsilon_x\right)y - \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right)z
\end{aligned}
\tag{9.56}$$

Punând condiția ca accelerația punctului M să fie nulă ($a_x = a_y = a_z = 0$) se obține un sistem de ecuații liniar și omogen în necunoscutele x, y și z . Pentru ca acest sistem să admită și soluții nenule este necesar ca determinantul sistemului să se anuleze, adică:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_y\omega_z - \varepsilon_x & \omega_x\omega_z + \varepsilon_y \\ \omega_y\omega_x + \varepsilon_z & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y\omega_z - \varepsilon_x \\ \omega_z\omega_x - \varepsilon_y & \omega_z\omega_y + \varepsilon_x & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{vmatrix} = -\left(\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}\right)^2
\tag{9.57}$$

Relația (9.57) este verificată doar dacă vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ sunt coliniari sau unul dintre ei este nul. Cum însă, în general, acești vectori sunt nenuli și au suporturi diferite, sigurul punct de accelerație nulă este punctul fix $O(0, 0, 0)$.

În concluzie, în mișcarea sferică distribuția de accelerații este specifică și nu poate fi redusă la cea corespunzătoare altei mișcări particulare a rigidului.

9.3. Mișcarea generală a rigidului

9.3.1. Generalități

În subcapitolul 9.2 ne-am concentrat asupra unui număr de cinci mișcări particulare ale rigidului. Mișcările particulare se caracterizează prin impunerea unor restricții de natură geometrică asupra rigidului, ceea ce are drept rezultat reducerea numărului de grade de libertate ale acestuia.

În acest subcapitol vom reveni asupra unor aspecte ale distribuției de viteze și accelerații în mișcarea generală a rigidului. Inexistența restricțiilor geometrice face ca

rigidul să aibă numărul maxim de grade de libertate, adică șase. Vectorii \vec{v}_O , \vec{a}_O , $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ sunt funcții oarecare de timp și au expresiile analitice:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_O &= v_{Ox} \vec{i} + v_{Oy} \vec{j} + v_{Oz} \vec{k}, & \vec{a}_O &= a_{Ox} \vec{i} + a_{Oy} \vec{j} + a_{Oz} \vec{k} \\
\vec{\omega} &= \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, & \vec{\varepsilon} &= \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k}
\end{aligned}
\tag{9.58}$$

Dreptele suport ale celor patru vectori au direcții arbitrare în spațiu (în cazul cel mai general).

9.3.2. Studiul distribuției de viteze

Distribuția de viteze în mișcarea generală a rigidului este dată de formula Euler :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ (9.59) \end{aligned}$$

Componentele pe axe ale vectorului viteză sunt :

$$v_x = v_{Ox} + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = v_{Oy} + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = v_{Oz} + \omega_x y - \omega_y x$$

(9.60)

Vom demonstra că distribuția instantanee de viteze în mișcarea generală a rigidului este reductibilă la cea specifică mișcării elicoidale. Pentru aceasta va fi suficient

să arătăm că există puncte în care vectorii \vec{v} și $\vec{\omega}$ sunt coliniari, adică :

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{\omega}, \lambda \in R$$

(9.61)

proprietate analoagă cu cea din mișcarea elicoidală (vezi subcapitolul 9.2.3).

Condiția (9.61) este echivalentă cu relația:

$$\frac{v_x}{\omega_x} = \frac{v_y}{\omega_y} = \frac{v_z}{\omega_z}$$

(9.62)

sau, după înlocuirea componentelor vectorului viteză, cu :

$$\frac{v_{Ox} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_{Oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_{Oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$$

(9.63)

Ecuatiile (9.63) reprezintă ecuațiile unei drepte paralele cu dreapta suport a vectorului $\vec{\omega}$. Ea se numește *axă instantanee a mișcării elicoidale*.

Așadar, în mișcarea generală a rigidului distribuția de viteze la un moment dat se obține ca și când rigidul ar efectua o mișcare elicoidală în jurul axei instantanee a mișcării

elicoidale cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ și viteza de translație:

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\vec{v}_O \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

(9.64)

Viteza unui punct arbitrar M al rigidului aflat în mișcare generală are două componente: una, egală cu \vec{v}_i , este paralelă cu $\vec{\omega}$ și nu depinde de punct iar a doua, notată \vec{v}_p , depinde de punct și este perpendiculară pe $\vec{\omega}$ (vezi figura T 9.11). Punctele

axeii instantanee a mișcării elicoidale au viteza minimă, egală cu \vec{v}_i , deoarece componenta normală pe $\vec{\omega}$ este nulă.

Locul geometric al axeii instantanee a mișcării elicoidale față de reperul fix este o suprafață riglată numită *axoidă fixă* iar locul geometric al aceleiași axe față de reperul mobil (solidar cu rigidul) este tot o suprafață riglată numită *axoidă mobilă*.

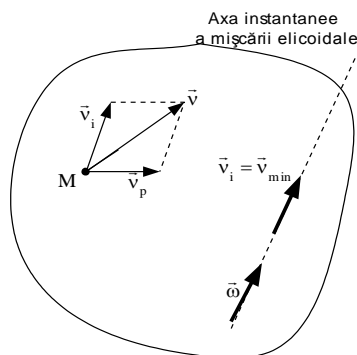


Figura T 9.11

Cele două axoide sunt tangente după axa instantanee a mișcării elicoidale iar axoida mobilă se rostogolește peste cea fixă în jurul tangentei comune existând totodată și o alunecare în lungul acesteia cu viteza \vec{v}_i .

Concluzionând, se desprinde ideea că *distribuția de viteze este specifică fiecărei mișcări particulare. Ea poate fi redusă la o distribuție de viteze instantanee specifică mișcării de translație, rotație (pentru mișcarea plan-paralelă sau mișcarea sferică) sau elicoidală (pentru mișcarea generală).*

9.3.3. Studiul distribuției de accelerații

Distribuția de accelerații în mișcarea generală a rigidului este dată de formula lui Euler :

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

(9.65)

Componentele pe axele reperului mobil Oxyz sunt date de relațiile (9.16). Pentru a investiga dacă distribuția de accelerații în mișcarea generală este reductibilă la cea corespunzătoare unei mișcări particulare se cercetează existența punctelor de accelerație nulă. Punând condițiile $a_x = a_y = a_z = 0$, din (9.16) se obține un sistem de ecuații liniar și neomogen în necunoscutele x, y și z. Determinantul acestui sistem (identic cu cel obținut în mișcarea sferică) este :

$$\Delta = -\left(\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}\right)^2$$

(9.66)

În general, vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ nu sunt coliniari și, în consecință, $\Delta \neq 0$. Prin urmare distribuția de accelerații în mișcarea generală a rigidului este similară celei din mișcarea sferică, adică există un unic punct de accelerație nulă (de coordonate egale cu soluția sistemului liniar neomogen), numit *polul accelerațiilor*. Acest punct își schimbă poziția în timp atât față de reperul fix cât și față de cel mobil.

Dacă însă $\Delta = 0$, atunci sunt posibile următoarele cazuri:

- nu există puncte de accelerație nulă, ceea ce corespunde mișcărilor de translație și elicoidală ;
- există o infinitate de puncte de accelerație nulă, situate pe o dreaptă, ceea ce corespunde mișcărilor de rotație sau plan-paralelă.

În concluzie, distribuția de accelerații este specifică fiecărei mișcări particulare în parte.

9. 4. Probleme rezolvate

R 9.1) Se consideră roțile O și O' , cuplate prin intermediul manivelor $O'A'$ și $O''A''$ și bielei $A'A''$ (figura R 9.1). Știind că locomotiva se deplasează cu viteza constantă v_0 , se cere:

- Viteza unui punct arbitrar M al bielei;
- Traectoria descrisă de nunctul M .

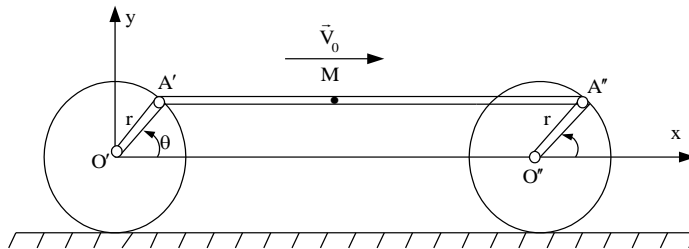


Figura R 9.1

Rezolvare: a) În tot timpul mișcării manivela $O'A'$ și $O''A''$ rămân paralele , astfel încât patrulaterul $O'A'A''O''$ este de fapt paralelogram. În consecință, laturile $A'A''$ și $O'O''$ sunt și ele paralele în tot timpul mișcării și cum dreapta $O'O''$ este fixă în spațiu mișcarea bielei este o translație. Rezultă că $\vec{v}_M = \vec{v}_{A'}$. Mișcarea roții de centru O' este o mișcare plan-paralelă de viteză unghiulară $\omega = \frac{v_0}{r}$, centrul instantaneu de rotație fiind în punctul I . Viteza punctului A' are caracteristicile:

$$\vec{v}_A \begin{cases} \perp IA' \\ \text{sens trigonometric} \\ v_{A'} = \omega \cdot IA' = 2r \sin \frac{90 + \theta}{2} = v_0 \sqrt{2(1 - \sin \theta)} \end{cases}$$

b) Coordonatele carteziene ale punctului M în raport cu reperul fix $O_1x_1y_1$ sunt:

$$x = v_0 t + A'M + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

unde $\theta = \frac{v_0}{r} t$, și reprezintă ecuațiile parametrice ale unei cicloide (translatată față de cicloida descrisă de punctul A' cu vectorul $\vec{A'M}$).

R 9.2) O placă plană omogenă, având forma unui disc de rază R , se rotește în jurul unei axe fixe (Δ) perpendiculară pe planul plăcii (figura R 9.2.1). Cunoscând viteza $\vec{v}_A = \lambda \vec{AB}$ ($\lambda > 0$) a unui punct de pe periferia roții, direcția vitezei punctului B ($\vec{v}_B \perp OB$) și distanța $AB = d$, să se determine :

- Punctul unde axa (Δ) intersectează planul plăcii ;
- Viteza unghiulară ω în mișcarea de rotație a plăcii ;
- Viteza punctului B (ca mărime și sens) ;
- Viteza centrului O al plăcii .

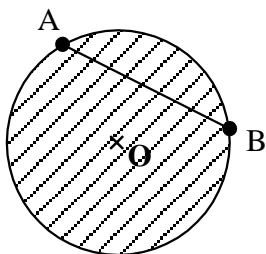


Figura R 9.2.1

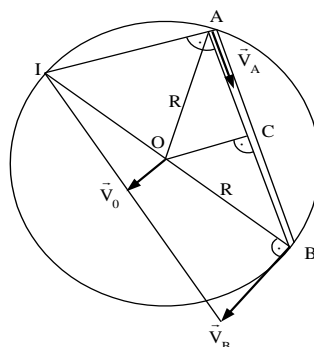


Figura R 9.2.2

Rezolvare: a) Fie I punctul în care axa de rotație intersectează planul plăcii (figura R 9.2.2). Deoarece $\vec{v}_A \perp IA$, $\vec{v}_B \perp IB$, rezultă că I este la intersecția dreptei OB cu perpendiculara în A pe AB. $\triangle OCB \approx \triangle IAB \Rightarrow IB = 2R$ (punctul I aparține periferiei discului).

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{\omega} & \left\{ \begin{array}{l} \perp (OAB) \\ \text{sens orar} \\ \omega = \frac{v_A}{IA} = \frac{\lambda d}{\sqrt{4R^2 - d^2}} \end{array} \right. ; \text{ c) } \vec{v}_B & \left\{ \begin{array}{l} \perp IB \\ \text{sens dat de } \vec{\omega} \\ v_B = IB \cdot \omega = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - d^2}} \lambda d \end{array} \right. \quad \text{d) } \vec{v}_O = \frac{1}{2} \vec{v}_B
 \end{aligned}$$

R 9.3) Un paralelipiped dreptunghic [OABCDEFG] având laturile $OA = 3 \text{ m}$, $OB = 4 \text{ m}$, $OC = 5 \text{ m}$ se rotește în jurul diagonalei OF cu viteza unghiulară $\omega = 2 \text{ rad/s}$ (figura R 9.3). Să se determine vitezele și accelerațiile punctelor F , A și D .

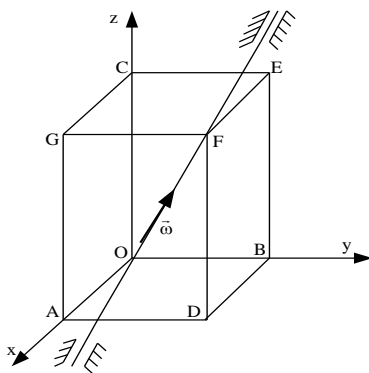


Figura R 9.3

Rezolvare: Vectorul viteză unghiulară are expresia analitică:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_{OF} = \omega \cdot \frac{\vec{OF}}{OF} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \vec{i} + \frac{4\sqrt{2}}{5} \vec{j} + \sqrt{2} \vec{k} .$$

Deoarece punctul F aparține axei de rotație rezultă că $\vec{v}_F = \vec{a}_F = \vec{0}$. Pentru vitezele și accelerațiile punctelor A și D obținem:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & \sqrt{2} \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{2} \vec{j} - \frac{12\sqrt{2}}{5} \vec{k} \\
 \vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{OD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & \sqrt{2} \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} \vec{i} + 3\sqrt{2} \vec{j}
 \end{aligned}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OA}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & \sqrt{2} \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\frac{12\sqrt{2}}{5} \end{vmatrix} = \frac{246}{25} \vec{i} + \frac{72}{25} \vec{j} + \frac{18}{5} \vec{k}$$

$$\vec{a}_D = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OD}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & \sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -6 \vec{i} - 8 \vec{j} + 10 \vec{k}.$$

Modulele acestor vectori sunt:

$$v_A = 5,43 \text{ m/s}, v_D = 7,07 \text{ m/s} \quad a_A = 17,80 \text{ m/s}^2, a_D = 14,14 \text{ m/s}^2.$$

R 9.4) Raza unui șurub este r iar unghiul de înclinare al filetului este α . Știind că șurubul se rotește în piulița cu viteza unghiulară ω , să se afle viteza v a unui punct de pe axa șurubului.

Rezolvare: Viteza v a unui punct oarecare de pe periferia șurubului (aflat în mișcare elicoidală) este egală cu $v = n \cdot p$, unde $n = \frac{\omega}{\pi}$ este turația mișcării iar $p = 2\pi r \tan \alpha$ este pasul șurubului. Unitățile de măsură folosite sunt: $[v] = \text{m/s}$, $[r] = \text{m}$, $[\omega] = 1/\text{s}$.

R 9.5) O bară $AB = l$ se deplasează în planul $O_1x_1y_1$ astfel încât capătul A alunecă pe axa O_1x_1 cu viteza \vec{v}_A . Bara este tangentă în C la cercul de rază r și centru O_1 (figura R 9.5.1). Se cere:

- Baza și rostogolitoarea în mișcarea plan – paralelă a barei ;
- Vitezele punctelor B și C .

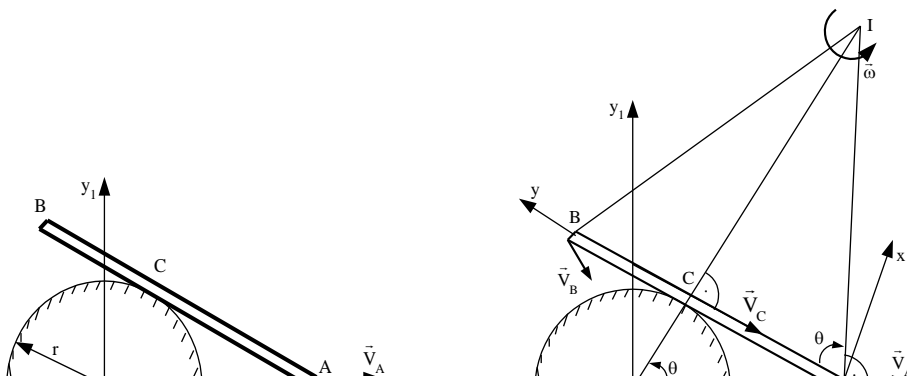


Figura R 9.5.1

Figura R 9.5.2

Rezolvare: a) Deoarece bara este în permanență tangentă la cercul $C(O_1, r)$ rezultă că viteza punctului de tangentă C va fi în lungul barei AB (normală pe raza O_1C). Pentru a determina centrițele mișcării plan-paralele executate de bară va trebui determinată poziția centrului instantaneu de rotație (CIR) pentru o poziție arbitrară a barei, dată prin unghiul θ (vezi figura R 9.5.2). CIR-ul se găsește la intersecția perpendicularelor pe dreptele suport ale vitezelor punctelor A și C, perpendicularele fiind construite în aceste puncte.

Determinarea bazei

Coordonatele CIR – ului față de sistemul de referință fix $O_1 x_1 y_1$ sunt:

$$x_1 = O_1A = \frac{r}{\cos \theta}, \quad y_1 = IA = O_1A \cdot \tan \theta = r \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

Eliminând parametrul θ între aceste două relații se obține ecuația bazei:

$$r^2(x_1^2 + y_1^2) - x_1^4 = 0.$$

Determinarea rostogolitoarei

Se consideră sistemul de referință mobil Axy, solidar legat de bară. Față de acest sistem coordonatele CIR- ului sunt:

$$x = IC = AI \sin \theta = r \tan^2 \theta, \quad y = AC = r \tan \theta.$$

Ecuația rostogolitoarei, obținută prin eliminarea parametrului θ între ultimele două relații este $y^2 = r x$, adică ecuația unei parabole ce are ca axă de simetrie axa Ox.

b) Modulul vitezei unghiulare este $\omega = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_A}{r} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$, sensul acestui vector fiind dat

de viteza \vec{v}_A (sens trigonometric). Viteza punctului C este un vector dirijat în lungul dreptei AB, de la B către A și are modulul $v_C = IC \cdot \omega = v_A \sin \theta$ iar viteza punctului B este un vector perpendicular pe IB, de modul

$$v_B = IB \cdot \omega = \omega \sqrt{IA^2 + AB^2 - 2 IA \cdot AB \cos \theta}, \text{ unde } IA = r \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \text{ și } AB = l.$$

R 9.6) Un disc de rază r se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal (figura R 9.6.1). Viteza centrului discului este \vec{v}_O . Într-un punct A de pe periferia discului este articulată bara AB, de lungime l , al cărui capăt B se deplasează pe un plan orizontal. Să se calculeze vitezele punctelor A și B în funcție de unghiul θ de rotație al discului.

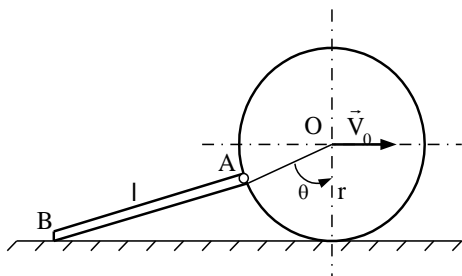


Figura R 9.6.1

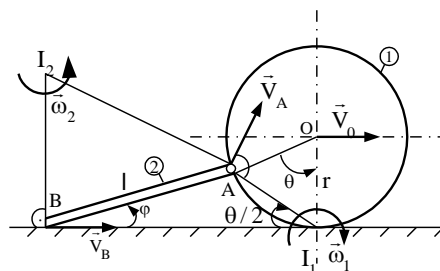


Figura R 9.6.2

Rezolvare: Discul și bara au mișcări plan-paralele. Discul se rostogolește fără să alunece peste planul orizontal astfel încât CIR- ul în mișcarea plan-paralelă a acestui corp este în punctul I_1 de contact între disc și plan (figura R 9.6.2). Rezultă că:

$$\vec{\omega}_1 \begin{cases} \perp (OAB) \\ \text{sens orar} \\ \omega_1 = \frac{v_0}{r} \end{cases} ; \quad \vec{v}_A \begin{cases} \perp I_1 A \\ \text{sens dat de } \vec{\omega}_1 \\ v_A = I_1 A \cdot \omega_1 = 2v_0 \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

CIR- ul corpului 2, I_2 , se găsește la intersecția dreptei $I_1 A \left(\perp \vec{v}_A \right)$ cu verticala din B $\left(\perp \vec{v}_B \right)$ astfel că:

$$\vec{\omega}_2 \begin{cases} \perp (OAB) \\ \text{sens trigonometric} \\ \omega_2 = \frac{v_A}{I_2 A} \end{cases} ; \quad \vec{v}_B \begin{cases} \perp I_2 B \\ \text{spredreapta} \\ v_B = I_2 B \cdot \omega_2 = \frac{I_2 B}{I_1 A} v_A \end{cases}.$$

Pentru determinarea distanțelor $I_2 A$ și $I_2 B$ se notează $\widehat{ABI_1} = \varphi$ și se aplică teorema sinusurilor în triunghiurile ABI_1 și ABI_2 . Se găsește că:

$$\Delta ABI_1 : \frac{AB}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{I_1 A}{\sin \varphi} ; \quad \Delta ABI_2 : \frac{AB}{\sin \left(90 - \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{I_2 A}{\sin (90 - \varphi)} = \frac{I_2 B}{\sin \left(180 - \varphi - \frac{\theta}{2} \right)}.$$

Rezolvând acest sistem obținem distanțele:

$$I_2 A = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$I_2 B = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \left(\frac{2r}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{l} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right).$$

R 9.7) Se consideră sistemul de corpuri din figura R 9.7.1 pentru care se dau distanțele $O_1A = AB = BC = BD = DE = EF = l, CD = l_1$ și unghiurile α, β . Știind că manivela O_1A se rotește cu viteza unghiulară ω , să se determine vitezele punctelor A, B, C, E și F și vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului.

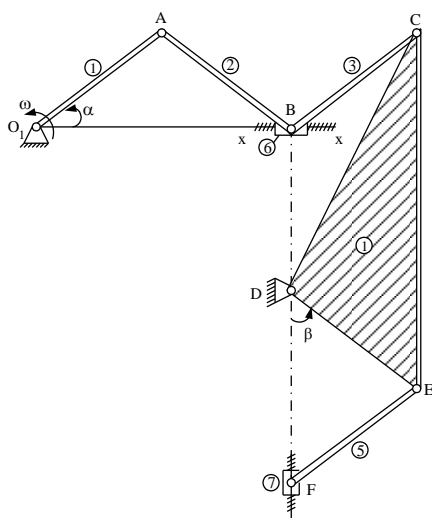


Figura R 9.7.1

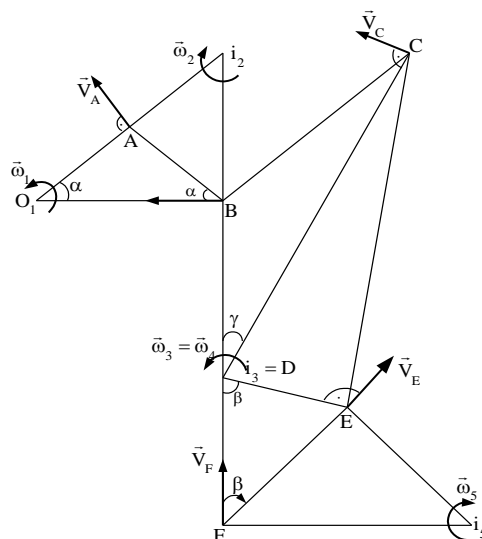


Figura R 9.7.2

Rezolvare: Cele șapte corpuri ale sistemului au următoarele mișcări:

- Corpul 1 – mișcare de rotație;
- Corpul 2 – mișcare plan – paralelă;
- Corpul 3 – mișcare plan – paralelă;
- Corpul 4 – mișcare de rotație;
- Corpul 5 – mișcare plan – paralelă;
- Corpul 6 – mișcare de translație;
- Corpul 7 – mișcare de translație.

Punctul A, considerat ca punct al manivelei O_1A , execută o mișcare circulară pe un cerc cu centrul în O_1 și de rază $O_1A = l$, cu viteza \vec{v}_A normală pe O_1A , având sensul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ (trigonometric) și modulul $v_A = O_1A \cdot \omega = l \omega$.

CIR- ul barei AB se găsește la intersecția verticalei în B cu dreapta O_1A (vezi figura R 9.7.2). Viteza unghiulară $\vec{\omega}_2$, în mișcarea plan-paralelă a acestei bare, are sensul orar iar modulul $\omega_2 = \frac{v_A}{I_2A} = \omega$, deoarece $I_2A = O_1A = l$.

Viteza punctului B (ca și viteza oricărui punct al corpului 6) este un vector perpendicular pe I_2B , orientat spre stânga, și are modulul $v_B = I_2B \cdot \omega_2 = 2l \omega \sin \alpha$.

Viteza punctului C, considerat ca punct al plăcii triunghiulare CDE, este un vector perpendicular pe raza CD astfel încât CIR- ul I_3 al barei BC va fi la intersecția dreptei CD cu normala în B pe O_1B , adică $I_3 \equiv D$. Viteza unghiulară $\vec{\omega}_3$, din mișcarea plan-paralelă a barei BC, este determinată ca sens și modul de viteza punctului B. Se obține:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BD} = 2 \omega \sin \alpha \quad , \quad v_C = CD \cdot \omega_3 = 2l_1 \omega \sin \alpha$$

Rotația plăcii triunghiulare CDE va fi caracterizată de vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_3$, obținut cu ajutorul vitezei punctului C. Viteza punctului E este un vector perpendicular pe DE, cu sensul din figura R 9.7.2 și modulul $v_E = DE \cdot \omega_4 = 2l \omega \sin \alpha$.

În fine, CIR- ul I_5 al barei EF se găsește la intersecția dreptei DE (normală pe \vec{v}_E) cu orizontala lui F (normală pe \vec{v}_F). Din triunghiul isoscel DEF (DE = EF) se găsește că $\widehat{EDF} = \widehat{DFE} = \beta$ iar din triunghiul dreptunghic DFI_5 că $I_5F = 2l \sin \beta$ și $I_5E = l$. Vectorul \vec{v}_E determină sensul vitezei unghiulare $\vec{\omega}_5$ (orar) și modulul acesteia: $\omega_5 = \frac{v_E}{I_5E} = 2 \omega \sin \alpha$.

Viteza punctului F (ca și viteza oricărui punct al corpului 7) este un vector perpendicular pe I_5F ($// yy'$, orientat spre B) și are modulul $v_F = I_5F \cdot \omega_5 = 4l \omega \sin \alpha \sin \beta$.

R 9.8) Se consideră mecanismul din figura R 9.8.1 constând din manivela OA și discul de centru A și raza r . Manivela OA se rotește în jurul punctului O cu viteza unghiulară ω_0 și accelerația unghiulară ε_0 iar discul se rostogolește fără să alunece pe o suprafață cilindrică. Să se determine vitezele punctelor A, B și C și accelerația punctului A.

Se cunosc : $OA = 55 \text{ cm}$, $r = 20 \text{ cm}$, $\omega_0 = 2 \text{ rad / s}$, $\varepsilon_0 = 5 \text{ rad / s}^2$.

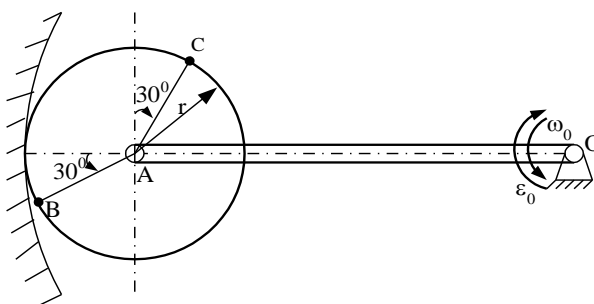


Figura R 9.8.1

Rezolvare: Discul are o mișcare plan-paralelă, CIR-ul fiind în I_2 (vezi figura R 9.8.2). Se obține ușor că:

$$\vec{v}_A \begin{cases} \perp OA \\ \text{sens dat de } \vec{\omega}_0 \\ v_A = OA \cdot \omega_0 = 110 \text{ cm/s} \end{cases} ; \quad \vec{\omega}_2 \begin{cases} \perp (I_2 BC) \\ \text{sens orar} \\ \omega_2 = \frac{v_A}{I_2 A} = 5,5 \text{ rad/s} \end{cases} ;$$

$$\vec{v}_B \begin{cases} \perp I_2 B \\ \text{sens dat de } \vec{\omega}_2 \\ v_B = I_2 B \cdot \omega_2 = 2r \omega_2 \sin 15^\circ = 56,94 \text{ cm/s} \end{cases} ;$$

$$\vec{v}_C \begin{cases} \perp I_2 C \\ \text{sens dat de } \vec{\omega}_2 \\ v_C = I_2 C \cdot \omega_2 = 2r \omega_2 \sin 60^\circ = 190,52 \text{ cm/s} \end{cases} .$$

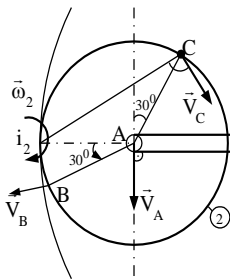


Figura R 9.8.2

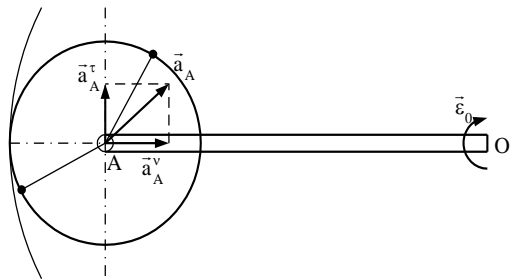


Figura R 9.8.3

Accelerația punctului A este accelerația unui punct aflat în mișcare circulară (vezi figura R 9.8.3):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^v$$

$$\vec{a}_A^\tau \begin{cases} \perp OA \\ \text{sens dat de } \vec{\varepsilon}_0 \\ a_A^\tau = OA \cdot \varepsilon_0 = 275 \text{ cm/s}^2 \end{cases} ; \quad \vec{a}_A^\nu \begin{cases} // OA \\ A \rightarrow O \\ a_A^\nu = OA \cdot \omega_0^2 = 220 \text{ cm/s}^2 \end{cases} ;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^\nu)^2} = 352,17 \text{ cm/s}^2.$$

R 9.9) Un corp se rotește în jurul unei axe care trece prin originea sistemului de coordonate carteziene Oxyz. Viteza punctului $M_1(1,0,1)$ al corpului este egală cu $v_1 = 4 \text{ m/s}$ iar unghiul α_1 dintre această viteză și axa Ox este de 45° . Știind că unghiul α_2 dintre viteza punctului $M_2(3,4,0)$ și axa Ox este dat de ecuația $\cos \alpha_2 = -0,8$, să se afle:

- Viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}$ și viteza \vec{v}_2 a punctului M_2 ;
- Ecuația axei instantanee de rotație.

Rezolvare: a) Viteza unui punct $M(x, y, z)$ al unui solid rigid cu un punct fix se obține cu ajutorul relației vectoriale:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y) \vec{i} + (\omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z) \vec{j} + (\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x) \vec{k}$$

(1)

astfel încât proiecțiile vitezelor \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt:

$$v_{1x} = \omega_y \cdot z_1 - \omega_z \cdot y_1 = \omega_y$$

(2a)

$$v_{1y} = \omega_z \cdot x_1 - \omega_x \cdot z_1 = \omega_z - \omega_x$$

(2b)

$$v_{1z} = \omega_x \cdot y_1 - \omega_y \cdot x_1 = -\omega_y$$

(2c)

$$v_{2x} = \omega_y \cdot z_2 - \omega_z \cdot y_2 = -4\omega_z$$

(3a)

$$v_{2y} = \omega_z \cdot x_2 - \omega_x \cdot z_2 = 3\omega_z$$

(3b)

$$v_{2z} = \omega_x \cdot y_2 - \omega_y \cdot x_2 = 4\omega_x - 3\omega_y$$

(3c)

Notând cu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, respectiv $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, unghiurile făcute de vectorii \vec{v}_1 , respectiv \vec{v}_2 , cu axele sistemului Oxyz, putem scrie:

$$v_{1x} = v_1 \cos \alpha_1 = 2\sqrt{2}$$

(4a)

$$v_{1y} = v_1 \cos \beta_1 = 3 \cos \beta_1$$

(4b)

$$v_{1z} = v_1 \cos \gamma_1 = 3 \cos \gamma_1$$

(4c)

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

(4d)

și

$$v_{2x} = v_2 \cos \alpha_2 = -0,8 v_2$$

(5a)

$$v_{2y} = v_2 \cos \beta_2$$

(5b)

$$v_{2z} = v_2 \cos \gamma_2$$

(5c)

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$$

(5d)

Din relațiile (2a) și (4a) rezultă că:

$$\omega_y = 2\sqrt{2} \quad (\text{rad} / \text{s}) \quad (6)$$

iar din relația (2c) se obține:

$$v_{1z} = -2\sqrt{2} \quad (\text{m} / \text{s}) \quad (7)$$

Înmulțind relația (4d) cu v_1^2 și folosind (4a, b, c) găsim că:

$$v_{1y} = \sqrt{v_1^2 - v_{1x}^2 - v_{1z}^2} = \sqrt{16 - 8 - 8} = 0 \quad (\text{m} / \text{s}) \quad (8)$$

astfel încât din relațiile (2b) și (8) rezultă că:

$$\omega_z = \omega_x \quad (9)$$

Din relațiile (3a) și (5a) se găsește că:

$$\omega_z = 0,2 v_2$$

(10)

iar din (3b, c), (5a), (6), (9) și (10) rezultă:

$$v_{2x} = -0,8 v_2, \quad v_{2y} = 0,6 v_2, \quad v_{2z} = 0,8 v_2 - 6\sqrt{2} \quad (11)$$

Înlocuind relațiile (11) în

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2$$

(12)

se obține o ecuație de gradul al doilea în necunoscuta v_2 ce are soluția dublă:

$$v_2 = \frac{15\sqrt{2}}{2} \quad (\text{m} \quad / \quad \text{s}) \quad (13)$$

astfel încât vectorii \vec{v}_2 și $\vec{\omega}$ sunt dați de:

$$\vec{v}_2 = -6\sqrt{2} \vec{i} + \frac{9\sqrt{2}}{2} \vec{j} \quad , \quad \vec{\omega} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \vec{i} + 2\sqrt{2} \vec{j} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \vec{k} \quad (14)$$

b) Ecuația axei instantanee de rotație are forma:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (15)$$

Înlocuind valorile proiecțiilor vectorului $\vec{\omega}$, se obține axa instantanee de rotație ca intersecție de două plane:

$$x = z = \frac{3}{4} y \quad (16)$$

R 9.10) Se consideră un cub de latură a aflat în mișcare pentru care se cunoaște la un moment dat viteza \vec{v}_A a punctului A, dirijată după diagonala AH (figura R 9.10.1). Se cere să se determine viteza punctului D știind că ea este dirijată după muchia AD precum și viteza punctului B știind că ea este situată în planul ABD.

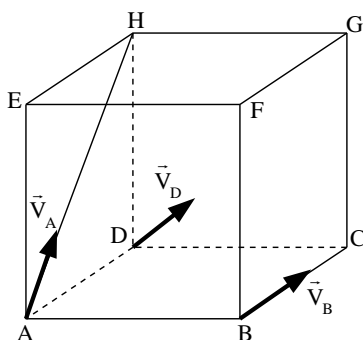


Figura R 9.10.1

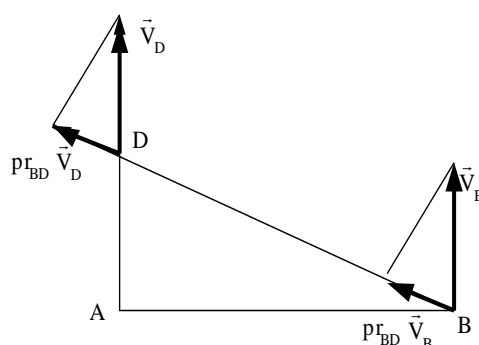


Figura R 9.10.2

Rezolvare: Se știe că în mișcarea generală a solidului rigid proiecțiile vitezelor a două puncte aparținând rigidului pe dreapta care unește cele două puncte sunt egale.

Utilizând această proprietate în cazul punctelor A și D se găsește că:

$$pr_{AD} \vec{v}_D = pr_{AD} \vec{v}_A \quad (1)$$

Viteza punctului D, dirijată conform ipotezei după muchia AD, va avea deci sensul proiecției lui \vec{v}_A pe AD (adică de la A spre D) iar modulul:

$$v_D = \left| pr_{AD} \vec{v}_A \right| = v_A \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} v_A$$

(2)

Aplicând aceiași proprietate pentru punctele A și B găsim că:

$$pr_{AB} \vec{v}_A = pr_{AB} \vec{v}_B = 0$$

(3)

căci $\vec{v}_A \perp AB$, ceea ce înseamnă că și $\vec{v}_B \perp AB$.

Utilizând și ipoteza conform căreia viteza punctului B este situată în planul ABD rezultă că vectorul \vec{v}_B este dirijat după muchia BC. Pentru a obține scalarul acestei viteze se observă că:

$$pr_{BD} \vec{v}_D = pr_{BD} \vec{v}_B \quad (4)$$

Fiind vectori paraleli și având aceiași proiecție pe dreapta BD (figura R 9.10.2) rezultă că:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D \quad (5)$$

9.5. Probleme propuse

9.5.1. Teste clasice

TC 9.1) Roata unui scrânciob are o mișcare de rotație cu turația constantă $n = 60 \text{ rot / min}$. Știind că raza roții este $R = 10 \text{ m}$, să se determine viteza și accelerația punctului B al unui scaun în ipoteza în care axa scaunului rămâne în tot timpul mișcării paralelă cu ea însăși (figura TC 9.1.1).

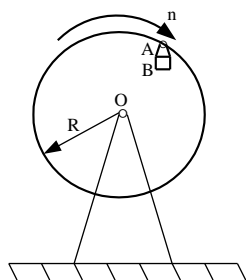


Figura TC 9.1.1

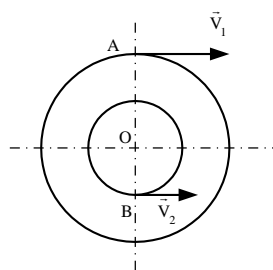


Figura TC 9.3.1

TC 9.2) În mișcarea de rotație a discului unui polizor se știe că mărimea la un moment dat a unghiului la centru descris de la începutul mișcării este proporțională cu pătratul timpului. Să se determine viteza și accelerația unui punct oarecare de pe periferia discului de rază $R = 30 \text{ cm}$ la momentul $t_2 = 4 \text{ s}$ dacă după $t_1 = 2 \text{ s}$ de la începutul mișcării discul are turația $n_1 = 50 \text{ rot / min}$.

TC 9.3) Două roți solidare, de raze R și r , sunt antrenate simultan cu două cremaliere astfel încât punctele A și B au viteze cunoscute \vec{v}_1 și \vec{v}_2 . Dacă $v_1 > v_2$, să se determine poziția centrului instantaneu de rotație, viteza unghiulară instantanee și viteza centrului comun O al celor două roți (figura R 9.3.1).

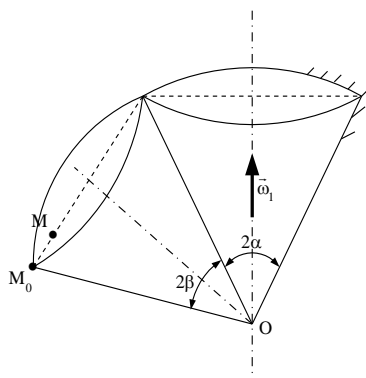


Figura TC 9.4.1

TC 9.4) Se consideră două conuri circulare drepte având generatoarele de lungimi egale $l = 30 \text{ cm}$, unghiurile la vârf $2\alpha = 90^\circ$ și $2\beta = 60^\circ$, respectiv (figura TC 9.4.1). Primul con este fix iar cel de-al doilea se rostogolește peste cel fix cu viteza unghiulară $\omega_1 = 1,2 \text{ rad/s}$ dirijată în lungul axei de simetrie a conului fix. Cele două conuri au vârfurile în același punct O. Se cere să se determine viteza și accelerația unghiulară a conului mobil precum și viteza și accelerația punctului M ce se găsește pe dreapta de intersecție a planului bazei conului mobil cu planul format de cele două axe de simetrie a conurilor, la distanța $MM_0 = 10 \text{ cm}$ de circumferința cercului de bază.

TC 9.5) Se consideră un solid rigid (C) în mișcarea cea mai generală, studiată cu ajutorul sistemului de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ și al sistemului de referință mobil $Oxyz$. Se cunosc la un moment dat vitezele:

$$\vec{v}_O = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{v}_A = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \vec{v}_B = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

a trei puncte $O(0, 0, 0)$, $A(2, 1, 1)$ și $B(2, 0, 2)$ aparținând solidului rigid (figura TC 9.5).

- Să se determine elementele $\vec{\omega}$ și \vec{v}_{\min} ale torsorului cinematic de reducere în raport cu un punct al axei instantanee a mișcării elicoidale;
- Ecuatiile axei instantanee a mișcării elicoidale.

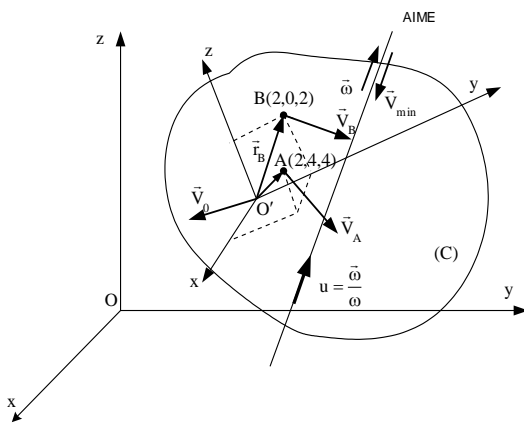


Figura TC 9.5

9.6. Indicații și răspunsuri

TC 9.1) Vezi figura TC 9.1.2. Scaunul are o mișcare de translație, deci $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ și $\vec{a}_B = \vec{a}_A$.

$$\vec{v}_A \begin{cases} \perp OA \\ \text{sens de mișcare (sens dat de } \vec{\omega} \text{)} \\ v_A = OA \cdot \omega = 20\pi \text{ (m/s)} \end{cases}, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_A^v \begin{cases} // OA \\ A \rightarrow O \\ a_A^v = OA \cdot \omega^2 = 40\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)} \end{cases}$$

S-a folosit relația dintre turația roții (exprimată în *rot/min*) și viteza sa unghiulară (exprimată în *rad/s*): $\omega = \frac{\pi n}{30} = 2\pi$.

TC 9.2) $\theta = \lambda t^2$ ($\lambda > 0$ constanta), $\omega = \dot{\theta} = 2\lambda t$, $\varepsilon = \ddot{\theta} = 2\lambda$. Deoarece $\omega = \frac{\pi n}{30}$,

rezultă $\frac{\pi n_1}{30} = 2\lambda t_1$, $\frac{\pi n_2}{30} = 2\lambda t_2$ și, în consecință, $n_2 = \frac{t_2}{t_1} n_1 = 100 \text{ rot/min}$.

$$v_2 = R\omega_2 = R \cdot \frac{\pi n_2}{30} = 100\pi \text{ cm/s}, \quad a_2^v = \frac{v_2^2}{R} = \frac{250\pi^2}{3} \text{ cm/s}^2,$$

$$a_2^\tau = R\varepsilon_2 = R \cdot 2\lambda = R \cdot \frac{\pi n_1}{30t_1} = \frac{\pi}{4} \text{ cm/s}^2, \quad a_2 = \sqrt{(a_2^v)^2 + (a_2^\tau)^2}.$$

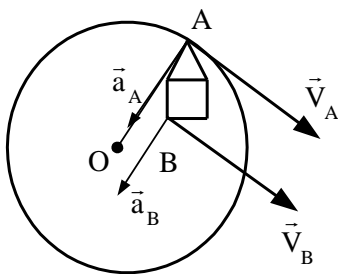


Figura TC 9.1.2

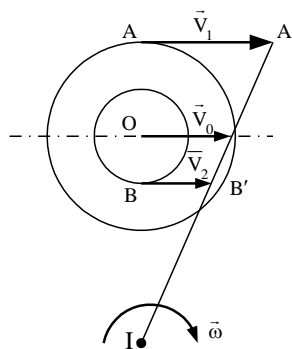


Figura TC 9.3.2

TC 9.3) Vezi figura TC 9.3.2. Fie I centrul instantaneu de rotație. Deoarece $\vec{v}_1 \perp IA$, $\vec{v}_2 \perp IB$, rezultă că $I \in AB$. Distribuția de viteze pe IA este liniară astfel încât $I \in A'B'$. Rezultă că I este la intersecția dreptelor AB și $A'B'$.

$$\Delta IBB' \approx \Delta IAA' \Rightarrow \frac{IB}{IB+R+r} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow IB = (R+r) \frac{v_2}{v_1 - v_2}.$$

Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ este perpendiculară pe planul figurii, are sens orar și modulul $\omega = \frac{v_2}{IB} = \frac{v_1 - v_2}{R+r}$. Viteza centrului O este perpendiculară pe IO , este orientată spre dreapta și are modulul $v_O = IO \cdot \omega = (IB+r) \cdot \omega = \frac{v_1 r + v_2 R}{r+R}$.

TC 9.4) Mișcarea conului mobil este mișcarea unui rigid cu punct fix (punctul O).

Vectorul vitează unghiulară $\vec{\omega}$ în această mișcare este dirijat în lungul generatoarei OO' (axa punctelor de vitează nulă la un moment dat) și rezultă ca o compunere de doi vectori: $\vec{\omega}_1$ - caracterizează mișcarea de rostogolire a conului mobil peste cel fix și $\vec{\omega}_2$ - caracterizează mișcarea conului mobil în jurul axei proprii. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul format de vectorii vitează unghiulară (ΔOAB) găsim că:

$$\frac{\omega_1}{\sin 30^\circ} = \frac{\omega_2}{\sin 45^\circ} = \frac{\omega}{\sin 105^\circ},$$

de unde $\omega = \omega_1 \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 2,32 \text{ rad/s}$. Viteza punctului M este dată de:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{OM} \text{ și } v_M = \left| \vec{\omega} \times \vec{OM} \right| = \omega \cdot OM \cdot \sin \left(\hat{\vec{\omega}, \vec{OM}} \right).$$

În $\Delta OO'M$ se aplică teorema sinusurilor și se obține că $\frac{OM}{\sin 60^\circ} = \frac{O'M}{\sin 105^\circ}$, de

unde $v_M = \omega \cdot O'M \cdot \sin 60^\circ = 40,14 \text{ m/s}$ (deoarece raza conului de unghi la vârf 2β este $R_2 = l \sin \beta = 15 \text{ cm}$ și deci $O'M = 20 \text{ cm}$).

Considerând un sistem de referință cartezian fix $Ox_1y_1z_1$ cu axa Oz_1 în lungul vectorului $\vec{\omega}_1$, avem că:

$$\vec{\omega} = \omega \sin 45^\circ \cos \omega_1 t \vec{i}_1 + \omega \sin 45^\circ \sin \omega_1 t \vec{j}_1 + \omega \cos 45^\circ \vec{k}_1,$$

de unde:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = -\omega \omega_1 \sin 45^\circ \sin \omega_1 t \vec{i}_1 + \omega \omega_1 \sin 45^\circ \cos \omega_1 t \vec{j}_1$$

și, pentru $t = 0$, $\vec{\varepsilon} = \omega \omega_1 \sin 45^\circ \vec{j}_1$ iar $\varepsilon = \omega \omega_1 \sin 45^\circ = 1,96 \text{ rad/s}^2$. În fine,

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{OM} \right).$$

Observând că la $t = 0$ $\vec{OM} = OM \sin(45 + \gamma) \vec{i}_1 + OM \cos(45 + \gamma) \vec{j}_1$ și folosind expresiile lui $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ la $t = 0$ se obține accelerația $a_M = 64,2 \text{ cm/s}^2$. Cu γ s-a notat măsura unghiului dintre vectorii $\vec{\omega}$ și \vec{OM} .

TC 9.5) Componentele vitezei unui punct oarecare $M(x, y, z)$ al unui rigid în mișcare generală sunt:

$$v_x = v_{Ox} + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \quad v_y = v_{Oy} + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \quad v_z = v_{Oz} + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x.$$

Se aplică acest rezultat pentru punctele A și O, respectiv B și O, și se găsește că $\omega_x = -2$, $\omega_y = 1$, $\omega_z = 2$, de unde:

$$\vec{\omega} = -2 \vec{i} + \vec{j} + 2 \vec{k}, \quad \left| \vec{\omega} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$\vec{v}_{\min} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} = \frac{16}{9} \vec{i} - \frac{8}{9} \vec{j} - \frac{16}{9} \vec{k}.$$

a) Axa instantanee a mișcării elicoidale este dată prin ecuațiile:

$$\frac{v_{Ox} - y \omega_z + z \omega_y}{\omega_x} = \frac{v_{Oy} - z \omega_x + x \omega_z}{\omega_y} = \frac{v_{Oz} - x \omega_y + y \omega_x}{\omega_z}$$

În cazul particular al problemei noastre se obține:

$$x + 2y = \frac{8}{9}, \quad 2y - z = \frac{11}{9}.$$

10. Mișcarea relativă a punctului material

În capitolele 8 și 9 s-a studiat mișcarea unui punct material sau a unui rigid în raport cu un reper fix (adică mișcarea absolută).

Vom considera în cele ce urmează mișcarea unui punct material (capitolul 10) în raport cu un reper mobil aflat, la rândul lui, în mișcare față de un reper fix. Se pune în acest caz problema determinării parametrilor cinematici (traietorie, viteză, accelerație) ce caracterizează mișcarea punctului sau a rigidului în raport cu reperul fix, dacă se cunosc parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea punctului sau a rigidului în raport cu reperul mobil și parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea reperului mobil în raport cu cel fix.

10.1. Definiții și exemple

Mișcarea punctului material în raport cu sistemul fix se numește *mișcare absolută*. Viteza (respectiv accelerația) punctului în această mișcare se numește *viteză absolută* (respectiv *accelerație absolută*) și se notează cu \vec{v}_a (respectiv \vec{a}_a).

Mișcarea punctului material în raport cu sistemul mobil se numește *mișcare relativă*. Viteza (respectiv accelerația) punctului în această mișcare se numește *viteză relativă* (respectiv *accelerație relativă*) și se notează cu \vec{v}_r (respectiv \vec{a}_r).

Se numește *mișcare de transport* mișcarea în raport cu sistemul fix a punctului solidar cu reperul mobil și care în momentul considerat coincide cu punctul a cărui mișcare se studiază. Viteza (respectiv accelerația) punctului în această mișcare se numește *viteză de transport* (respectiv *accelerație de transport*) și se notează cu \vec{v}_t (respectiv \vec{a}_t).

Exemplu: Se consideră o bară OA aflată în mișcare de rotație în jurul capătului articulat O în planul fix $O_1x_1y_1$ (figura T 10.1). În timp ce bara se rotește, un punct material M (un cursor) alunecă în lungul barei de la O spre A. Mișcarea absolută este mișcarea punctului față de reperul fix $O_1x_1y_1$. Punctul deplasându-se pe OA (considerată ca axă Ox a reperului mobil Oxy) iar bara rotindu-se în jurul lui OA traiectoria punctului va fi o curbă de tip spirală. Mișcarea relativă este mișcarea punctului față de reperul mobil Oxy, deci o mișcare rectilinie pe OA. Mișcarea de transport este mișcarea punctului M considerat imobil față de reperul mobil și aflat în mișcare față de cel fix. Ea este o mișcare circulară pe cercul cu centrul în O și de rază OM.

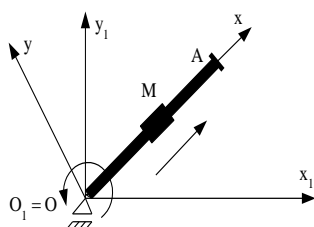


Figura T 10.1

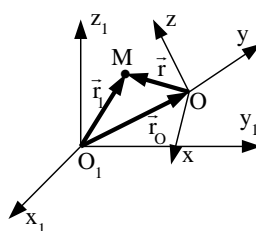


Figura T 10.2

10.2. Derivata absolută și derivata relativă a unui vector

Fie vectorul $\vec{v}(t)$ definit prin proiecțiile sale pe axele reperului mobil Oxyz:

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (10.1)$$

Derivând relația (10.1) în raport cu timpul t obținem:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \left(\dot{v}_x \vec{i} + v_x \dot{\vec{i}} + \dot{v}_y \vec{j} + v_y \dot{\vec{j}} + \dot{v}_z \vec{k} + v_z \dot{\vec{k}} \right) + \left(v_x \dot{\vec{i}} + v_y \dot{\vec{j}} + v_z \dot{\vec{k}} \right) \quad (10.2)$$

Membrul stâng al relației (10.2) reprezintă *derivata totală* sau *absolută* a vectorului \vec{v} . Prima paranteză din membrul drept reprezintă derivata vectorului \vec{v} față de sistemul mobil ca și cum acesta ar fi fix (adică versorii \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} nu-și schimbă direcția). Această derivată se numește *derivata locală* sau *relativă* a vectorului \vec{v} și se notează cu $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, cu observația că această notație nu reprezintă o derivată parțială. Ținând seama de formulele lui Poisson:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$$

a doua paranteză capătă forma:

$$v_x \dot{\vec{i}} + v_y \dot{\vec{j}} + v_z \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right) = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (10.3)$$

Relația (10.2) devine:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (10.4)$$

Această relație reprezintă formula de obținere a derivatei absolute (față de reperul fix) a unui vector \vec{v} dat prin proiecțiile sale pe axele reperului mobil.

10.3. Compunerea vitezelor

Fie un punct material M aflat în mișcare față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ și reperul mobil $Oxyz$ (figura T 10.2). Poziția punctului față de reperul fix este dată prin vectorul de poziție \vec{r}_1 iar față de reperul mobil prin vectorul \vec{r} . Între cei doi vectori există relația:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_O + \vec{r} \quad (10.5)$$

unde \vec{r}_O este vectorul de poziție al originii triedrului mobil față de cel fix.

Derivând în raport cu timpul relația (10.5) obținem:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_O + \dot{\vec{r}} \quad (10.6)$$

Dar:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_1 &= \vec{v}_a - \text{este viteza absolută (în raport cu reperul fix);} \\ \dot{\vec{r}}_O &= \vec{v}_O - \text{este viteza absolută a originii O a reperului mobil;} \\ \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}_r - \text{este viteza relativă (în raport cu reperul mobil ca și cum acesta ar fi fix).}$$

Observând că $\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$ reprezintă viteza unui punct solidar cu triedrul mobil și care coincide la momentul de timp considerat cu punctul M, adică viteza de transport \vec{v}_t , obținem următoarea formulă de compunere a vitezelor în mișcarea relativă a punctului material:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad (10.7)$$

10.4. Compunerea accelerațiilor

Considerăm relația (10.7) scrisă sub forma:

$$\vec{v}_a = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

pe care o derivăm în raport cu timpul t :

$$\dot{\vec{v}}_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) + \dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (10.8)$$

Dar:

$$\dot{\vec{v}}_a = \vec{a}_a - \text{este accelerația absolută a punctului M;}$$

•
 $\vec{v}_O = \vec{a}_O$ - este accelerația absolută a punctului O;

•
 $\vec{\omega} = \varepsilon$; $\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r;$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{a}_r \text{ - este accelerația relativă a punctului M.}$$

Suma $\vec{a}_O + \varepsilon \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ reprezintă accelerația unui punct solidar cu

triedrul mobil și care coincide la momentul de timp considerat cu punctul M, adică accelerația de transport \vec{a}_t a punctului M. Termenul $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{a}_C$ se numește *accelerație Coriolis* și exprimă influența simultană a mișcării de rotație a triedrului mobil față de cel fix și a mișcării relative a punctului asupra accelerației absolute a punctului material. Ținând cont de aceste observații obținem următoarea formulă de compunere a accelerațiilor în mișcarea relativă a punctului material:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$$

(10.9)

10.5. Probleme rezolvate

R 10.1) Cursorul M se deplasează pe bara cotică OAB ($m(\hat{OAB}) = 90^\circ$, OA = 12 cm)

după legea $AM = x(t) = 4t^2 + t$ (figura R 10.1.1). Bara se rotește în planul ei, în jurul unei axe ce trece prin O, cu viteza unghiulară $\omega = 3t$. Să se determine viteza absolută și accelerația absolută ale cursorului M în funcție de timp. Să se particularizeze rezultatele găsite pentru $t_1 = 1$ s.

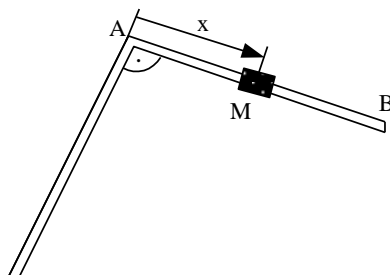


Figura R 10.1.1

Rezolvare: Considerăm sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ și sistemul de referință mobil $Axyz$, în raport cu care vom studia mișcarea cursorului M .

Mișcarea relativă a punctului M este o mișcare rectilinie, pe AB , în conformitate cu legea $x = 4t^2 + t$. Mișcarea de transport se obține solidarizând punctul cu bara (adică făcând să înceteze mișcarea relativă). Punctul M va executa în acest caz o mișcare circulară, pe cercul cu centrul în O și de rază $AM = \sqrt{l^2 + x^2}$, cu viteza unghiulară $\omega = 3t$.

Studiul vitezelor (figura R 10.1.2)

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

$$\vec{v}_r \begin{cases} // AB \\ A \rightarrow B \\ v_r = \dot{x} = 8t + 1 \end{cases} ; \vec{v}_t \begin{cases} \perp OM \\ \text{sens dat de } \vec{\omega} \\ v_t = OM \cdot \omega = 3t \sqrt{l^2 + (4t^2 + t)^2} \end{cases}$$

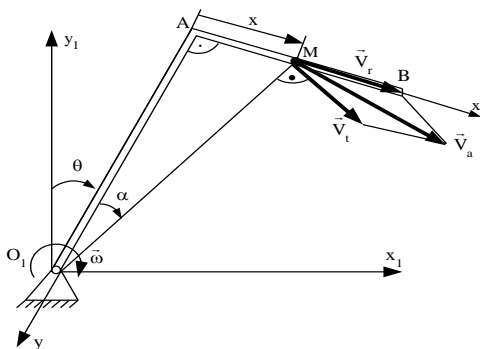


Figura R 10.1.2

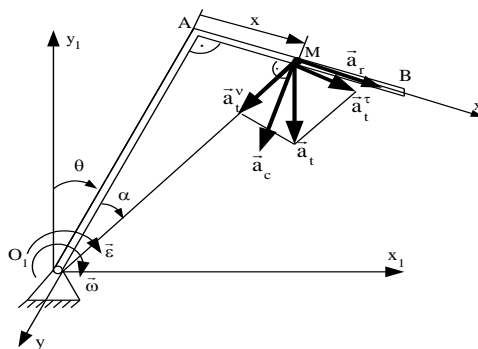


Figura R 10.1.3

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos \alpha} = \sqrt{(8t+1)^2 + 9t^2 [144 + (4t^2 + t)^2] + 72t(8t+1)}$$

Studiul accelerațiilor (figura R 10.1.3)

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C ; \quad \vec{a}_r \left\{ \begin{array}{l} // AB \\ A \rightarrow B \\ a_r = \ddot{x} = 8 \end{array} \right. ; \quad \vec{a}_t = \vec{a}_t^\tau + \vec{a}_t^\nu$$

$$\vec{a}_t^\tau \left\{ \begin{array}{l} \perp OM \\ \text{sens dat de } \vec{\varepsilon} \\ a_t^\tau = OM \cdot \varepsilon = OM \cdot \dot{\omega} = 3\sqrt{l^2 + (4t^2 + t)^2} \end{array} \right. ; \quad \vec{a}_t^\nu \left\{ \begin{array}{l} // OM \\ M \rightarrow O \\ a_t^\nu = OM \cdot \omega^2 = 9t^2 \sqrt{l^2 + (4t^2 + t)^2} \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \left\{ \begin{array}{l} \perp \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) \\ \text{sens dat de regulă burghiului drept} \\ a_C = 2\omega v_r \sin \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) = 6t(8t+1) \end{array} \right.$$

$$a_{ax} = a_r + a_t^\tau \cos \alpha - a_t^\nu \sin \alpha = -36t^4 - 9t^3 + 44$$

$$a_{ay} = a_C + a_t^\tau \sin \alpha + a_t^\nu \cos \alpha = 168t^2 + 9t$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2}$$

Caz particular : $t = 1 \text{ s}$

$$x = 5 \text{ cm}, OM = 13 \text{ cm}, \cos \alpha = \frac{12}{13}, \sin \alpha = \frac{5}{13}, \omega = 3 \text{ rad/s}, \varepsilon = 3 \text{ rad/s}^2$$

$$v_r = 9 \text{ cm/s}, v_t = 39 \text{ cm/s}, v_a = 43,4 \text{ cm/s}$$

$$a_r = 8 \text{ cm/s}^2, a_t^\tau = 39 \text{ cm/s}^2, a_t^\nu = 117 \text{ cm/s}^2, a_C = 56 \text{ cm/s}^2, a_a = 177,1 \text{ cm/s}^2$$

R 10.2) Un mobil M se deplasează pe semicercul de rază R conform legii $\phi_1 = \frac{\omega_0^2}{4} t^2$, unde ω_0 este o constantă pozitivă. În același timp semicercul se rotește față de diametrul său AB după legea $\phi_2 = \omega_0 t$ (figura R 10.2.1). Să se determine :

a) Timpul t_1 după care mobilul ajunge în poziția $\phi_1 = \frac{\pi^2}{4}$;

b) Pentru poziția corespunzătoare timpului t_1 , să se determine viteza și accelerația absolută ale mobilului M .

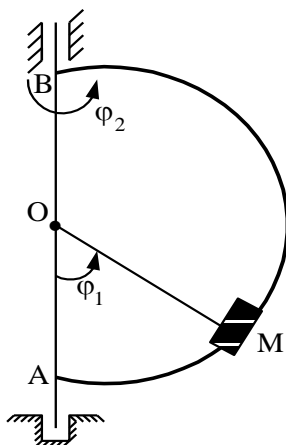


Figura R 10.2.1

Rezolvare: a) $\varphi_1(t_1) = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \frac{\omega_0^2}{4} t_1^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$

b) Mișcarea relativă este o mișcare circulară, pe semicercul cu centrul în O și de rază $OM=R$, în conformitate cu legea $\varphi_1(t) = \frac{\omega_0^2}{4} t^2$.

Mișcarea de transport este tot o mișcare circulară pe cercul cu centrul în N și de rază $MN = OM \sin \varphi_1 = R \sin\left(\frac{\omega_0^2}{4} t^2\right)$, după legea $\varphi_2(t) = \omega_0 t$ (figura R 10.2.2) .

Studiul vitezelor (figura R 10.2.2)

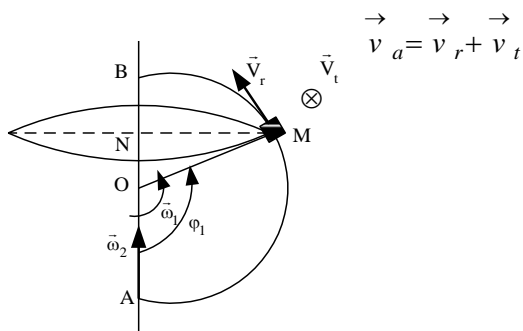


Figura R 10.2.2

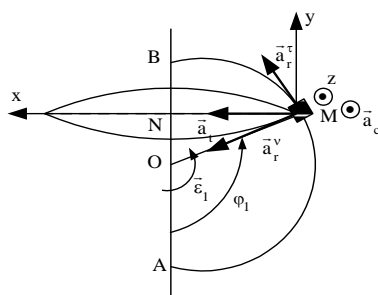


Figura R 10.2.3

$$\begin{aligned}
& \vec{\omega}_1 \begin{cases} \perp (OAM) \\ \text{sens trigonometric} \\ \omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{\omega_0^2}{2} t \end{cases} ; \quad \vec{\omega}_2 \begin{cases} // AB \\ A \rightarrow B \\ \omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \omega_0 \end{cases} \\
& \vec{v}_r \begin{cases} \perp OM \\ \text{sens dat de } \vec{\omega}_1 \\ v_r = OM \cdot \omega_1 = \frac{\pi R \omega_0^2}{4} \end{cases} ; \quad \vec{v}_t \begin{cases} \perp (OAM) \\ \text{sens dat de } \vec{\omega}_2 \\ v_t = MN \cdot \omega_2 = R \omega_0 \sin \frac{\pi^2}{4} \end{cases} \\
& \vec{v}_r \perp \vec{v}_t \Rightarrow v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = R \omega_0 \sqrt{\frac{\pi^2 \omega_0^2}{64} + \sin^2 \frac{\pi^2}{4}}
\end{aligned}$$

Studiul accelerațiilor (figura R 10.2.3)

$$\begin{aligned}
& \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c \\
& \vec{\varepsilon}_1 \begin{cases} \perp (OAM) \\ \text{sens trigonometric} ; \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 0 ; \vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^v ; \vec{a}_t = \vec{a}_t^v \left(\vec{a}_t^\tau = 0 \right) \\ \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{\omega_0^2}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vec{a}_r^\tau \begin{cases} \perp OM \\ \text{sens dat de } \vec{\varepsilon}_1 \\ a_r^\tau = OM \cdot \varepsilon_1 = \frac{R \omega_0^2}{2} \end{cases} ; \vec{a}_r^v \begin{cases} // OM \\ M \rightarrow O \\ a_r^v = R \omega_1^2 = \frac{\pi^2 R \omega_0^4}{64} \end{cases} ; \vec{a}_t^v \begin{cases} // MN \\ M \rightarrow N \\ a_t^v = MN \cdot \omega_2^2 = R \omega_0^2 \sin \frac{\pi^2}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_2 \times \vec{v}_r \begin{cases} \perp \left(\vec{\omega}_2, \vec{v}_r \right) \\ \text{sens trigonometric} \\ a_c = 2 \omega_2 v_r \sin \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi R \omega_0^3}{4} \sin \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

$$a_{ax} = a_t^v + a_r^\tau \cos(\pi - \varphi_1) + a_r^v \sin(\pi - \varphi_1) ; a_{ay} = a_r^\tau \sin(\pi - \varphi_1) - a_r^v \cos(\pi - \varphi_1)$$

$$a_{az} = a_c ; a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}$$

R 10.3) Un disc circular de rază $R = 2r$, cu centrul în O , se rostogolește fără să alunece pe dreapta (D). Într-un canal circular de rază r , cu centrul în O , se deplasează un mobil M cu viteza constantă în modul $|\vec{v}_1| = u = \text{constant}$ (figura R 10.3.1). Se cere să se determine viteza și accelerația absolută ale mobilului atunci când el se află în poziția M_0 (pe diametrul paralel cu dreapta (D)) știind că centrul O al discului se deplasează cu viteza constantă $|\vec{v}_O| = 2u$ (orientată spre dreapta).

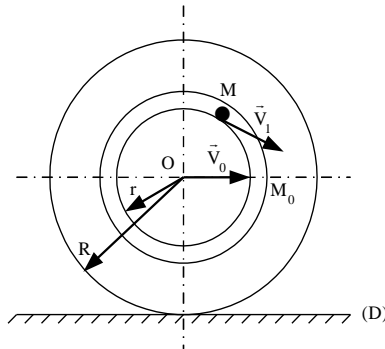


Figura R 10.3.1

Rezolvare: Mișcarea relativă este o mișcare circulară, pe cercul cu centrul în O și de rază r , cu viteza \vec{v}_1 . Mișcarea de transport este mișcarea unui punct (M_0) al unui corp aflat în mișcare plan – paralelă.

Studiul vitezelor (figura R 10.3.2)

CIR – ul discului se află în punctul I de contact cu dreapta (D)

$$\vec{\omega} \begin{cases} \perp (IOM_0) \\ \text{sensoar} \left(\text{dat de } \vec{v}_0 \right) \\ \omega = \frac{v_0}{r} = \frac{u}{r} \end{cases} ; \vec{v}_t \begin{cases} \perp OM_0 \\ \text{sens dat de } \vec{\omega} \\ v_t = IM_0 \cdot \omega = u\sqrt{5} \end{cases} ; \vec{v}_r \begin{cases} \perp OM_0 \\ \text{în jos} \\ v_r = v_1 = u \end{cases}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t ; v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_t)} = 2\sqrt{2}u$$

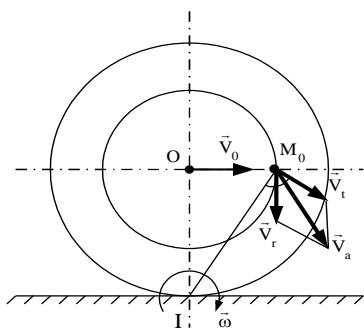


Figura R 10.3.2

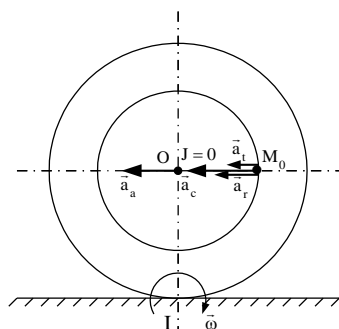


Figura R 10.3.3

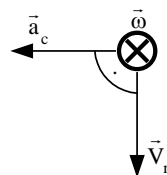


Figura R 10.3.4

Studiul accelerațiilor (figura R 10.3.3)

$\vec{v}_O = \text{constant} \Rightarrow \vec{a}_O = \vec{0} \Rightarrow$ polul accelerațiilor pentru disc este în punctul O ($J \equiv O$).

$$\vec{\omega} = \text{constant} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{0};$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} \begin{cases} // OM_0 \\ M_0 \rightarrow O \\ a_r = \frac{v_1^2}{r} = \frac{u^2}{r} \end{cases} ; \quad \vec{a}_t = \vec{a}_t^v \begin{cases} // OM_0 \\ M_0 \rightarrow O \\ a_t = OM_0 \cdot \omega^2 = \frac{u^2}{r} \end{cases}$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \begin{cases} \perp \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) \\ \text{sens dat de regulă burghiului drept (vezi figura R 8.3c)} \\ a_C = 2\omega v_r \sin \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) = \frac{2u^2}{r} \end{cases}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$$

$$a_a = a_r + a_t + a_C = \frac{4u^2}{r}.$$

R 10.4) Scara AB, de lungime l , se deplasează astfel încât capătul A se mișcă cu viteza $\left| \vec{v}_A \right| = u$ pe un perete orizontal iar capătul B pe un perete vertical (figura P 10.4.1). Pe bară se deplasează, pornind din B spre A, un punct material M în conformitate cu legea $s(t) = v \cdot t$ (u, v sunt constante pozitive). Se cer :

a) $\vec{v}_B, \vec{a}_B, \vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ în mișcarea plan – paralelă a barei ;

b) Viteza absolută și accelerația absolută ale punctului M în poziția $\theta = \frac{\pi}{4}$, $s = \frac{l}{2}$.

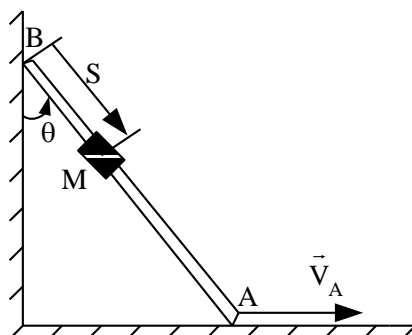


Figura R 10.4.1

Rezolvare: a) Poziția barei la un moment dat este fixată prin unghiul $\theta(t)$ (vezi figura R 10.4.2) . CIR – ul barei AB se află la intersecția perpendicularei în A pe Ox ($\perp \vec{v}_A$) cu perpendiculara în B pe Oy ($\perp \vec{v}_B$) , adică este al patrulea vârf al dreptunghiului BOAI .

$$\vec{\omega} \begin{cases} \perp (OAB) \\ \text{sens trigonometric} \left(\text{dat de } \vec{v}_A \right) \\ \omega = \frac{v_A}{IA} = \frac{u}{l \cos \theta} \end{cases} ; \quad \vec{v}_B \begin{cases} \perp IB \\ \text{sens dat de } \vec{\omega} \text{ (în jos)} \\ v_B = IB \cdot \omega = u \tan \theta \end{cases}$$

$$\vec{\varepsilon} \begin{cases} \perp (OAB) \\ \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{u}{l} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{u^2}{l^2} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} , \text{ deoarece } \omega = \dot{\theta} . \\ \text{sens trigonometric} (\varepsilon, \omega > 0) \end{cases}$$

$$\vec{v}_A = \text{constant} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{0} \Rightarrow A \equiv J \text{ (polul accelerațiilor)}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^\nu \quad ; \quad \vec{a}_B^\tau \begin{cases} \perp JB \\ \text{sens dat de } \vec{\varepsilon} \end{cases} \quad ; \quad \vec{a}_B^\nu \begin{cases} // JB \\ B \rightarrow J \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_B^\tau = JB \cdot \varepsilon = \frac{u^2}{l} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ a_B^\nu = JB \cdot \omega^2 = \frac{u^2}{l} \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{cases}$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^\nu)^2} = \frac{u^2}{l} \frac{1}{\cos^3 \theta} \quad (// BO)$$

Altfel : Punctul B are o mișcare rectilinie deci $\vec{a}_B // BO, B \rightarrow O, a_B = \dot{v}_B$.

b) Mișcarea relativă este o mișcare rectilinie , pe BA , după legea $s(t) = vt$. Mișcarea de transport este mișcarea punctului M al unui corp (bara AB) aflat în mișcare plan-paralelă .

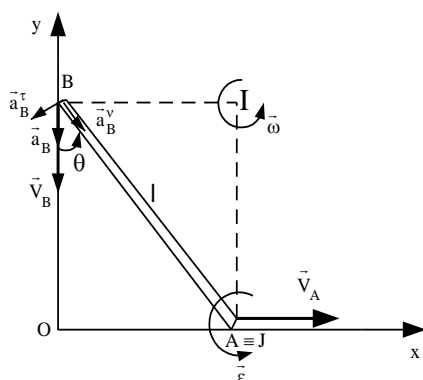


Figura R 10.4.2

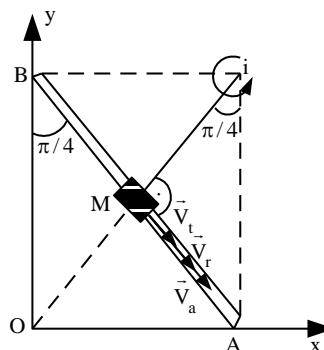


Figura R 10.4.3

Studiul vitezelor (figura R 10.4.3)

$$\vec{v}_r \begin{cases} // BA \\ B \rightarrow A \\ v_r = \dot{s} = v = \text{constant} \end{cases} \quad ; \quad \vec{v}_t \begin{cases} \perp IM (// BA) \\ \text{sens dat de } \vec{\omega} (\text{spre } A) \\ v_t = IM \cdot \omega = \frac{l}{2} \frac{u}{l \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{u\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

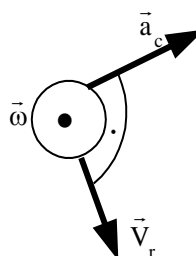
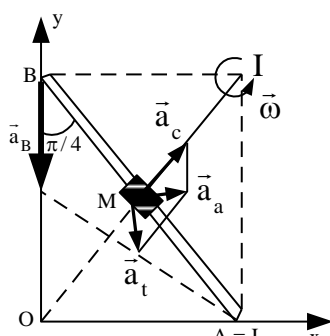


Figura R 10.4.4

Figura R 10.4.5

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad ; \quad v_a = v_r + v_t = v + \frac{u\sqrt{2}}{2}$$

Studiul accelerațiilor (figura R 10.4.4)

$$\vec{a}_r = \vec{0} \quad ; \quad \vec{a}_t = \frac{1}{2} \vec{a}_B \quad \left\{ \begin{array}{l} // OB \\ B \rightarrow O \\ a_t = \frac{u^2 \sqrt{2}}{l} \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad \left\{ \begin{array}{l} \perp \left(\vec{\omega}, \vec{v} \right) \\ \text{sens dat de regula burghiului drept (vezi figura R 10.4.5)} \\ a_C = 2 \omega v_r \sin \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) = \frac{2 u v \sqrt{2}}{l} \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C \quad ; \quad a_a = \sqrt{a_t^2 + a_C^2 + 2 a_t a_C \cos \left(\vec{a}_t, \vec{a}_C \right)} = \frac{u}{l} \sqrt{2 u^2 + 8 v^2 - 4 \sqrt{2} u v}$$

10.6. Probleme propuse

10.6.1. Teste clasice

TC 10.1) Se consideră mecanismul din figura TC 10.1.1, format din barele O_1A și O_2B de lungime R și semidiscul cu centrul în C de rază $AC = CB = R$. Bara O_1A se rotește în jurul punctului O_1 cu viteza unghiulară constantă ω . Pe semidisc se deplasează un punct

material M astfel încât $m(\hat{BCM}) = \theta(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}$, unde ω și ε sunt constante.

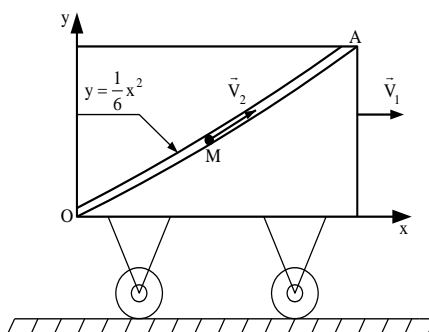
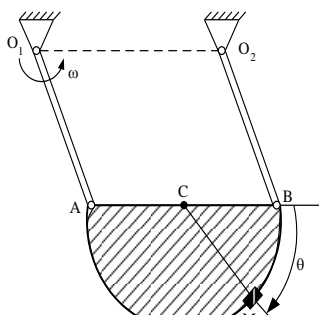


Figura TC 10.1.1

Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului M la un moment arbitrar de timp t .

Figura TC 10.2.1

TC 10.2) Un cărucior se deplasează pe un drum rectiliniu cu viteza constantă $\left| \vec{v}_1 \right| = u$.

Pe cărucior este montat un tub OA având forma unei parabole de ecuație $y = \frac{1}{2} x^2$

(figura TC 10.2.1). În interiorul tubului se mișcă cu viteza constantă $\left| \vec{v}_2 \right| = 2u$ un punct material M. Să se determine viteza absolută și accelerația absolută a punctului M la momentul de timp la care acesta trece prin punctul de abscisă $x = 3$.

10.6.2. Teste grilă

TG 10.1) Un disc de rază R se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe care trece prin centrul său și este perpendiculară pe planul discului (figura TG 10.1). Pe un diametru al discului se mișcă, plecând din centrul său, un punct M după legea $s = R \sin \omega t$. Traectoria absolută a punctului M este:

a) Elipsa de centru O și semiaxe R și $R/2$ dirijate în lungul diametrului OM și perpendicular pe el; b) O parabolă de centru O și axă de simetrie diametrul OM; c) Cercul de centru (O, $R/2$) și rază $R/2$; d) Cercul de centru (O, R) și rază R .

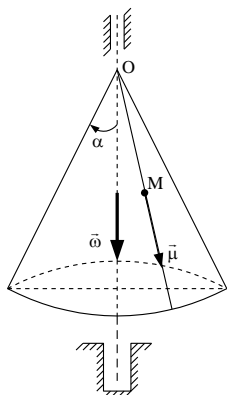


Figura TG 10.1

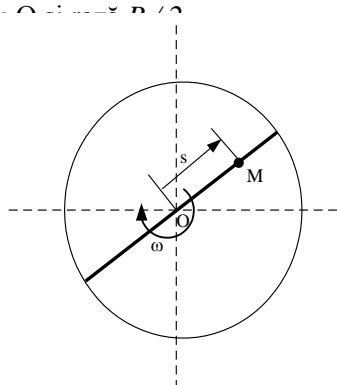


Figura TG 10.2

TG 10.2) Un punct M pornește din vârful O al unui con cu unghiul la vârf 2α și se mișcă pe o generatoare a conului cu viteza \vec{u} constantă.. În același timp, conul se rotește în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$ (figura TG 10.2). Care este viteza absolută a punctului M după t secunde de la începutul mișcării?

- a) $v_a = u \sqrt{1 + \omega t \sin \alpha}$; b) $v_a = u \sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin \alpha}$; c) $v_a = u + \omega t \sin \alpha$;
d) $v_a = u \sqrt{1 - \omega^2 t^2 \sin \alpha}$.

10.7. Indicații și răspunsuri

TC 10.1) Mișcarea relativă este o mișcare circulară pe semidiscul de diametru AB , conform legii $\theta(t) = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$. Deoarece $O_1 A B O_2$ este un paralelogram rezultă că AB rămâne paralelă cu ea însăși în timpul mișcării , semidiscul având astfel o mișcare de translație . Mișcarea de transport este mișcarea punctului M considerat ca punct fixat al semidiscului. Poziția barei $O_1 A$ este dată prin unghiul $\varphi = \omega t$.

Studiul vitezelor (figura TC 10.1.2)

$$\vec{v}_r \begin{cases} \perp CM \\ \text{sensul de creștere al unghiului } \theta \\ v_r = CM \cdot \dot{\theta} = R \varepsilon t \end{cases} ; \quad \vec{v}_t = \vec{v}_A \begin{cases} \perp O_1 A \\ \text{sensul dat de } \vec{\omega} \\ v_t = O_1 A \cdot \omega = R \omega \end{cases}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t ; \quad v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\theta + \varphi)}$$

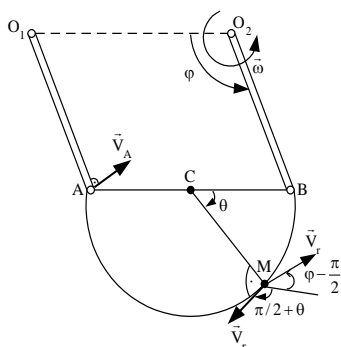


Figura TC 10.1.2

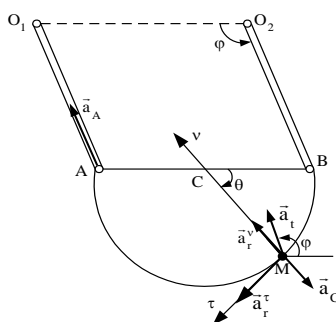


Figura TC 10.1.3

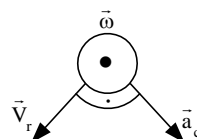


Figura TC 10.1.4

Studiul accelerațiilor (figura TC 10.1.3)

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^\nu ; \vec{a}_r^\tau \begin{cases} \perp CM \\ \text{sensul de creștere al unghiului } \theta ; \\ a_r^\tau = CM \cdot \ddot{\theta} = R \varepsilon \end{cases} ; \vec{a}_r^\nu \begin{cases} // CM \\ M \rightarrow C \\ a_r^\nu = CM \cdot \dot{\theta}^2 = R \varepsilon^2 t^2 \end{cases}$$

$$\vec{a}_t = \vec{a}_A = \vec{a}_A^\nu \begin{cases} // O_1 A \\ A \rightarrow O_1 \\ a_A^\nu = O_1 A \cdot \omega^2 = R \omega^2 \end{cases} ;$$

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r \begin{cases} \perp \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) \\ \text{sens dat de regula burghiului drept (figura TC 10.1.4) ;} \\ a_C = 2 \omega v_r \sin \left(\vec{\omega}, \vec{v}_r \right) = 2 R \omega \varepsilon t \end{cases}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$$

$$a_a^\tau = a_r^\tau + a_t \sin(\varphi + \theta - \pi) \quad ; \quad a_a^\nu = a_C - a_r^\nu - a_t \cos(\varphi + \theta - \pi) \quad ; \quad a_a = \sqrt{(a_a^\tau)^2 + (a_a^\nu)^2}$$

TC 10.2) Mișcarea relativă este mișcarea punctului M față de tub , cu viteza constantă în modul $v_2 = 2u$. Mișcarea de transport este mișcarea punctului M considerat ca punct al căruciorului aflat în mișcare de translație cu viteza constantă $v_1 = u$.

Studiul vitezelor (figura TC 10.2.2)

Unghiul făcut de tangenta în M la parabolă cu axa Ox este dat de relația $\alpha = \arctg f'(3) = \frac{\pi}{4}$, unde $f(x) = y = \frac{1}{6}x^2$.

$$\vec{v}_r \begin{cases} \text{petangenta în } M \text{ la parabolă} \\ O \rightarrow A \\ v_r = v_2 = 2u \end{cases} ; \quad \vec{v}_t = \vec{v}_1 \begin{cases} // Ox \\ \text{spre dreapta} \\ v_t = v_1 = u \end{cases}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad ; \quad v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos \alpha} = u\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

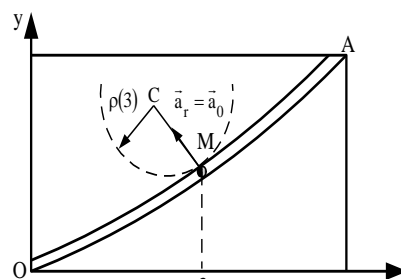
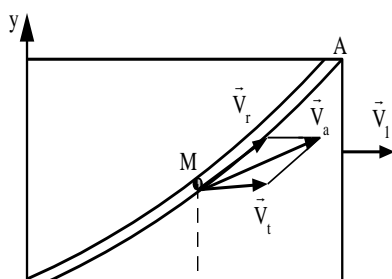


Figura TC 10.2.2

Figura TC 10.2.3

Studiul accelerațiilor (figura TC 10.2.3)

Raza de curbura a traiectoriei este dată de relația $\rho(x) = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{1,5}}{|f''(x)|} = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{9}\right)^{1,5}}{\frac{1}{3}}$.

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^v \begin{cases} \text{perpendiculară în } M \text{ la parabola} \\ \text{spre centrul de curbura} \end{cases} ; \quad \vec{a}_t = \vec{a}_t = 0 \quad (\text{deoarece } \vec{v}_1 = \text{constant})$$

$$a_r^v = \frac{v_2^2}{\rho(3)} = \frac{\sqrt{2}}{3} u^2$$

$\vec{a}_c = 0$ (mișcarea de transport este o translație)

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c ; \quad a_a = a_r = \frac{\sqrt{2}}{3} u^2.$$

TG 10.1) Față de reperul cartezian Ox_1y_1 cu axele Ox_1 și Oy_1 orizontală, respectiv verticală, coordonatele absolute ale punctului M sunt:

$$x_1 = s \cos \omega t = R \sin \omega t \cos \omega t = \frac{R}{2} \sin 2 \omega t$$

$$y_1 = s \sin \omega t = R \sin^2 \omega t = \frac{R}{2} (1 - \cos 2 \omega t) .$$

Eliminând variabila timp ($\sin^2 2 \omega t + \cos^2 2 \omega t = 1$) se găsește relația

$$x_1^2 + \left(y_1 - \frac{R}{2}\right)^2 = 1, \text{ care reprezintă ecuația cercului cu centrul în } (0, R/2) \text{ și rază } R/2.$$

Răspuns corect : c).

TG 10.2) Mișcarea relativă este mișcarea punctului M pe generatoare cu viteza \vec{u} iar mișcarea de transport este mișcarea circulară pe cercul cu centru M' și rază MM' (unde M' este proiecția punctului M pe axa de simetrie a conului), cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$.

Deci, $v_r = u$ și $v_t = MM' \cdot \omega = OM \sin \alpha \cdot \omega = u t \sin \alpha \cdot \omega$. Cum $\vec{v}_r \perp \vec{v}_t$ și $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$, găsim că $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = u \sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin^2 \alpha}$. Răspuns corect : **b**).

11. Mișcarea relativă a solidului rigid

11.1. Generalități

Fie un rigid (C) aflat în mișcare față de reperul fix $Ox_0y_0z_0$ și față de reperul mobil $O_1x_1y_1z_1$. Notăm prin $O_2x_2y_2z_2$ un triedru mobil solidar cu rigidul (figura T11.1). Ne propunem să determinăm parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea rigidului în raport cu reperul fix dacă se cunoaște mișcarea rigidului în raport cu triedrul mobil $O_1x_1y_1z_1$ și mișcarea acestui triedru mobil în raport cu cel fix.

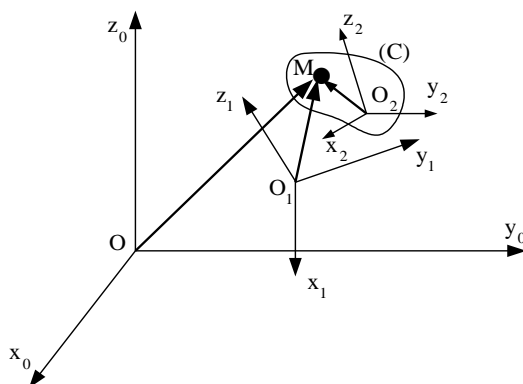


Figura T 11.1

Mișcarea triedrului $O_2x_2y_2z_2$ față de $O_1x_1y_1z_1$ este definită de vectorii:

- \vec{v}_{21} - viteza originii O_2 față de $O_1x_1y_1z_1$;
- $\vec{\omega}_{21}$ - viteza unghiulară în mișcarea relativă a rigidului față de $O_1x_1y_1z_1$;
- \vec{a}_{21} - accelerația originii O_2 față de $O_1x_1y_1z_1$;

$\vec{\varepsilon}_{21}$ - accelerația unghiulară în mișcarea relativă a rigidului față de $O_1x_1y_1z_1$.

Mișcarea triedrului $O_1x_1y_1z_1$ față de triedrul fix $Ox_0y_0z_0$ este definită de vectorii:

\vec{v}_{10} - viteza originii O_1 față de triedrul fix;

$\vec{\omega}_{10}$ - viteza unghiulară în mișcarea triedrului $O_1x_1y_1z_1$ față de cel fix;

\vec{a}_{10} - accelerația originii O_1 față de triedrul fix;

$\vec{\varepsilon}_{10}$ - accelerația unghiulară în mișcarea triedrului $O_1x_1y_1z_1$ față de cel fix.

Pentru a obține distribuția de viteze și accelerații în mișcarea relativă a rigidului trebuie să se determine viteza absolută și accelerația absolută a unui punct arbitrar M al rigidului precum și vectorii viteze unghiulară absolută și accelerație unghiulară absolută în mișcarea rigidului față de triedrul fix.

11.2. Compunerea vitezelor

Fie un punct arbitrar M al rigidului (figura T 11.1). Mișcarea sa față de triedrul $O_1x_1y_1z_1$ este o mișcare relativă astfel încât:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{O_2M} \quad (11.1)$$

Viteza de transport va fi viteza față de triedrul fix a unui punct solidar cu triedrul $O_1x_1y_1z_1$ și care va coincide la momentul de timp considerat cu punctul M, adică:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{O_1M} \quad (11.2)$$

Viteza absolută a punctului M va fi:

$$\vec{v}_a^M = \vec{v}_r + \vec{v}_t = \vec{v}_{10} + \vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{O_1M} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{O_2M} \quad (11.3)$$

Generalizând pentru mai multe mișcări de transport obținem:

$$\vec{v}_a^M = \sum_{i=1}^n \vec{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O_iM} \quad (11.4)$$

Pentru a determina viteza unghiulară absolută $\vec{\omega}_{n0}$ în mișcarea triedrului $O_nx_ny_nz_n$, solidar cu rigidul, față de triedrul fix vom considera un alt punct al rigidului (punctul N) și vom rescrie relația (11.4) pentru acest punct:

$$\vec{v}_a^N = \sum_{i=1}^n \vec{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O_iN} \quad (11.5)$$

Alegând punctul M drept origine a triedrului solidar cu rigidul, relația lui Euler pentru viteze se scrie:

$$\vec{v}_a^N = \vec{v}_a^M + \vec{\omega}_{n0} \times \vec{MN} \quad (11.6)$$

Cum $\vec{O}_i N = \vec{O}_i M + \vec{MN}$, din (11.4)-(11.6) găsim (după câteva calcule elementare) următoarea expresie a vitezei unghiulare absolute:

$$\vec{\omega}_{n0} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \quad (11.7)$$

Viteza unghiulară absolută în mișcarea rigidului față de triedrul fix este suma vectorială a vitezelor unghiulare relative ale mișcărilor componente.

11.3. Compunerea accelerațiilor

Vom raporta, pentru început, mișcarea rigidului față de triedrele mobile $O_2 x_2 y_2 z_2$, $O_1 x_1 y_1 z_1$ și față de triedrul fix $O x_0 y_0 z_0$.

Mișcarea relativă a punctului M este mișcarea sa față de $O_1 x_1 y_1 z_1$, astfel încât:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{21} + \vec{\varepsilon}_{21} \times \vec{O}_2 M + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \vec{O}_2 M \right) \quad (11.8)$$

Accelerația de transport este accelerația față de triedrul fix a unui punct solidar cu triedrul $O_1 x_1 y_1 z_1$ și care va coincide la momentul de timp considerat cu punctul M, adică:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{10} + \vec{\varepsilon}_{10} \times \vec{O}_1 M + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{O}_1 M \right) \quad (11.9)$$

Accelerația Coriolis se calculează cu viteza relativă \vec{v}_r (dată de (11.1)) și cu viteza unghiulară de transport $\vec{\omega}_{10}$:

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_{10} \times \vec{v}_r = 2 \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{O}_2 M \right) \quad (11.10)$$

Accelerația absolută a punctului M va fi:

$$\begin{aligned} \vec{a}_a^M = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c = \vec{a}_{10} + \vec{a}_{21} + \vec{\varepsilon}_{10} \times \vec{O}_1 M + \vec{\varepsilon}_{21} \times \vec{O}_2 M + \\ + \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{\omega}_{10} \times \vec{O}_1 M \right) + \vec{\omega}_{21} \times \left(\vec{\omega}_{21} \times \vec{O}_2 M \right) + 2 \vec{\omega}_{10} \times \left(\vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{O}_2 M \right) \end{aligned} \quad (11.11)$$

Se poate demonstra (vezi[2]) că, în cazul existenței mai multor mișcări de transport, accelerația absolută a punctului arbitrar M este dată de relația:

$$\begin{aligned}\vec{a}_a^M = & \sum_{i=1}^n \vec{a}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n \vec{\varepsilon}_{i,i-1} \times \vec{O}_i M + \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times \left(\vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O}_i M \right) + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_{j,j-1} \times \left(\vec{v}_{i,i-1} + \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O}_i M \right)\end{aligned}$$

(11.12)

și că accelerația unghiulară absolută $\vec{\varepsilon}_{n0}$ în mișcarea rigidului față de triedrul fix este:

$$\vec{\varepsilon}_{n0} = \sum_{i=1}^n \vec{\varepsilon}_{i,i-1} + \vec{\varepsilon}_C$$

(11.13)

unde $\vec{\varepsilon}_C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_{j,j-1} \times \vec{\omega}_{i,i-1}$ este un termen de corecție numit *accelerație unghiulară complementară*.

Relațiile (11.12) și (11.13) determină complet distribuția de accelerații în mișcarea relativă a rigidului. Accelerația absolută a altui punct (punctul N) se obține cu ajutorul formulei lui Euler pentru rigidul în mișcare generală alegând punctul M drept origine:

$$\vec{a}_a^N = \vec{a}_a^M + \vec{\varepsilon}_{n0} \times \vec{MN} + \vec{\omega}_{n0} \times \left(\vec{\omega}_{n0} \times \vec{MN} \right)$$

(11.14)

11.4. Cazuri particulare. Compuneri de mișcări instantanee.

În practică se întâlnesc adesea cazuri particulare de mișcări instantanee relative ale rigidului solidar legat de triedrul $O_n x_n y_n z_n$ în raport cu alte rigide cărora li s-au atașat triedrele $O_i x_i y_i z_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Vom discuta în cele ce urmează câteva din aceste cazuri.

11.4.1. Compuneri de translații

Deoarece toate triedrele mobile execută mișcări de translație, avem următoarele particularizări:

$$\vec{\omega}_{i,i-1} = \vec{\varepsilon}_{i,i-1} = \vec{0} \quad , \quad \vec{v}_{i,i-1}, \vec{a}_{i,i-1} = \text{vectori arbitrari}$$

(11.15)

Din relațiile (11.5), (11.7), (11.12) și (11.13) rezultă că:

$$\vec{\omega}_{n0} = \vec{\varepsilon}_{n0} = \vec{0} \quad , \quad \vec{v}_a^M = \sum_{i=1}^n \vec{v}_{i,i-1} \quad , \quad \vec{a}_a^M = \sum_{i=1}^n \vec{a}_{i,i-1}$$

(11.16)

ceea ce înseamnă că distribuția de viteze și accelerații corespunde unei mișcări de translație.

11.4.2. Compuneri de rotații paralele

Originile triedrelor mobile se aleg pe axele corespunzătoare de rotație, astfel încât:

$$\vec{v}_{i,i-1} = \vec{0}, i = \overline{1, n} \quad (11.17)$$

Notând cu \vec{u} versorul direcției comune a axelor de rotație, avem:

$$\vec{\omega}_{i,i-1} = \omega_{i,i-1} \cdot \vec{u}, \quad \vec{\varepsilon}_{i,i-1} = \varepsilon_{i,i-1} \cdot \vec{u}, i = \overline{1, n} \quad (11.18)$$

Din (11.7) se obține:

$$\vec{\omega}_{n0} = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} \right) \cdot \vec{u} = \omega_{n0} \vec{u} \quad (11.19)$$

unde $\omega_{n0} = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1}$, iar din (11.13) rezultă:

$$\vec{\varepsilon}_{n0} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,i-1} \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,i-1} \right) \cdot \vec{u} = \varepsilon_{n0} \vec{u} \quad (11.20)$$

deoarece $\vec{\varepsilon}_C = \vec{0}$ (produsele vectoriale sunt nule). S-a folosit notația $\varepsilon_{n0} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,i-1}$.

Viteza punctului arbitrar M are expresia particulară:

$$\vec{v}_a^M = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} \cdot \vec{u} \times \vec{O_i M} = \vec{u} \times \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} \cdot \vec{O_i M} \quad (11.21)$$

ceea ce arată că $\vec{v}_a^M \perp \vec{u}$ (sau $\vec{v}_a^M \perp \vec{\omega}_{n0}$). Sunt posibile două situații:

i) $\vec{\omega}_{n0} \neq \vec{0}$: Distribuția de viteze este cea corespunzătoare unei mișcări de rotație

cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_{n0}$ în jurul unei axe ce conține centrul vectorilor paraleli

$\vec{\omega}_{i,i-1}, i = \overline{1, n}$, numită *axă instantanee de rotație*. Într-adevăr, viteza absolută a punctului M (dată de (11.21)) poate fi scrisă sub forma:

$$\vec{v}_a^M = \left(\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \right) \cdot \vec{u} \times \frac{\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \cdot \vec{O}_i^M}{\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1}} = \vec{\omega}_{n0} \times \vec{r}_C$$

(11.22)

unde \vec{r}_C este vectorul de poziție al centrului vectorilor paraleli $\vec{\omega}_{i,i-1}, i = \overline{1, n}$, definit în mod identic cu centrul forțelor paralele.

Deoarece $\vec{\omega}_{n0} // \vec{\varepsilon}_{n0}$ (vezi (11.20)), distribuția de accelerații este identică cu cea din mișcarea de rotație în jurul axei instantanee de rotație.

ii) $\vec{\omega}_{n0} = \vec{0}$: Vitezele absolute ale punctelor M și N (relațiile (11.4) și (11.5)) devin:

$$\vec{v}_a^M = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O}_i^M, \quad \vec{v}_a^N = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O}_i^N$$

Scăzând membru cu membru cele două relații se obține:

$$\vec{v}_a^M - \vec{v}_a^N = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times (\vec{O}_i^M - \vec{O}_i^N) = \left(\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \right) \times \vec{MN} = \vec{0}$$

(11.23)

Relația (11.23) arată că *la un moment dat distribuția de viteze este aceeași cu cea dintr-o mișcare de translație, toate punctele având aceeași viteză*.

11.4.3. Compuneri de rotații concurente

Originile triedrelor mobile se aleg pe axele de rotație (deci este verificată relația (11.17)) și coincid:

$$O \equiv O_1 \equiv O_2 \equiv \dots \equiv O_n \Rightarrow \vec{O}_1^M = \vec{O}_2^M = \dots = \vec{O}_n^M = \vec{r}^{not}$$

Din relația (11.4) se deduce:

$$\vec{v}_a^M = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \times \vec{O}_i^M = \left(\sum_{i=1}^n \vec{\omega}_{i,i-1} \right) \times \vec{r} = \vec{\omega}_{n0} \times \vec{r}$$

(11.24)

Rezultă că *în cazul rotațiilor concurente distribuția de viteze se obține ca într-o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_{n0}$ în jurul unei axe ce trece prin O, numită axă instantanee de rotație*.

De asemenea, *distribuția de accelerații este cea din mișcarea unui rigid cu punct fix*, deoarece vectorii $\vec{\omega}_{n0}$ și $\vec{\varepsilon}_{n0}$ nu mai sunt paraleli. Chiar dacă $\vec{\varepsilon}_{i,i-1} = \vec{0}$ (rotații uniforme), accelerația unghiulară absolută este nenulă:

$$\vec{\varepsilon}_{n0} = \vec{\varepsilon}_C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{\omega}_{j,j-1} \times \vec{\omega}_{i,i-1}$$

și are suport diferit de cel al vitezei unghiulare absolute $\vec{\omega}_{n0}$.

11.5. Probleme rezolvate

R 11.1) O pană triunghiulară ABC, având unghiurile la bază egale cu α , este așezată între două corpuri ce au mișcări de translație pe un plan orizontal cu vitezele \vec{v}_{10} și \vec{v}_{20} (figura R 11.1.1). Să se studieze mișcarea absolută a penei.

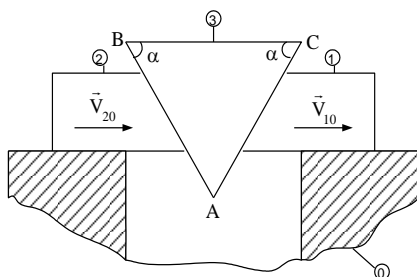


Figura R 11.1.1

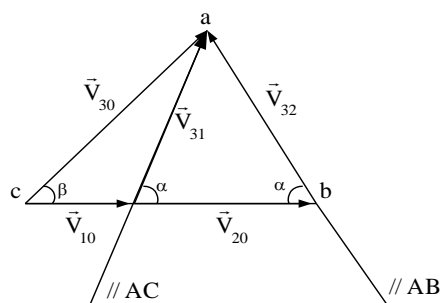


Figura 11.1.2

Rezolvare: Se notează sistemul fix (planul orizontal) cu (0) și corpurile în mișcare cu (1), (2) și (3). Pana se găsește în mișcare față de corpurile (1) și (2) care, la rândul lor, se mișcă față de planul orizontal (0). Mișcările componente fiind translații rezultă că mișcarea penei va fi tot o translație cu viteza absolută \vec{v}_{30} dată de relația:

$$\vec{v}_{30} = \vec{v}_{10} + \vec{v}_{31} = \vec{v}_{20} + \vec{v}_{32}$$

(1)

În relația (1) vitezele \vec{v}_{10} și \vec{v}_{20} sunt cunoscute iar vitezele relative \vec{v}_{31} și \vec{v}_{32} , în mișcarea penei față de corpurile (1) și (2), sunt paralele cu AC, respectiv AB. Reprezentarea geometrică a relației vectoriale (1) este dată în figura R 11.1.2.

Din triunghiul isoscel abc (asemenea cu triunghiul ABC) se obține viteza relativă dintre pană și corpurile (1), respectiv (2) :

$$v_{31} = v_{32} = \frac{v_{20} - v_{10}}{2 \cos \alpha}$$

(2)

Utilizând teorema cosinusului în triunghiul abc găsim modulul vitezei absolute a penei :

$$v_{30} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \sqrt{v_{10}^2 + v_{20}^2 + 2 v_{10} v_{20} \cos 2\alpha}$$

(3)

Unghiul pe care aceasta îl face cu planul horizontal se obține cu teorema sinusurilor aplicată în același triunghi :

$$\sin \beta = \frac{v_{32} \sin \beta}{v_{30}} = \frac{v_{20} - v_{10}}{2 v_{30}} \operatorname{tg} \alpha$$

(4)

Cazuri particulare :

$$1) \quad \vec{v}_{10} = \vec{v}_{20}$$

Din relațiile (3) și (4) se obține :

$$\vec{v}_{30} = \vec{v}_{10} = \vec{v}_{20} \quad , \quad \beta = 0$$

(5)

ceea ce înseamnă că pana și corpurile (1) și (2) formează un bloc care se deplasează pe planul horizontal.

$$2) \quad \vec{v}_{10} = - \vec{v}_{20}$$

Particularizând relațiile (3) și (4) găsim că:

$$v_{30} = v_{10} = v_{20} \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

(6)

adică pana se va deplasa pe direcția verticală cu aceeași viteză cu care corpurile (1) și (2) se apropie unul de celălalt.

R 11.2) Să se studieze mișcarea unei bile de rulment într-un lagăr în care se reazemă un pivot tronconic știind că nu au loc alunecări între rulment și lagăr și nici între rulment și arbore (figura R 11.2.1). Se cunoaște viteza unghiulară $\vec{\omega}_{10}$ a arborelui și unghiurile α și β .

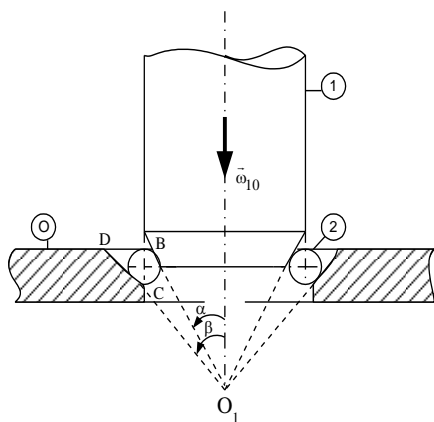


Figura R 11.2.1

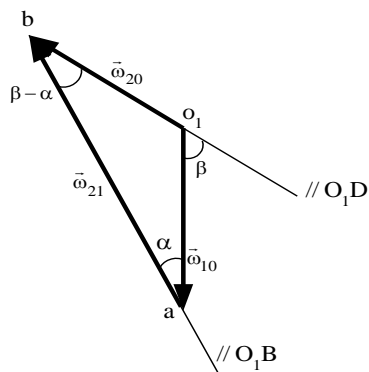


Figura R 11.2.2

Rezolvare : Notăm cu (0) elementul fix (lagărul), cu (1) arborele și cu (2) rulmentul. Deoarece nu există alunecare între rulment și arbore rezultă că axa instantanee a mișcării relative rulment-arbore este dreapta O_1B (figura R 11.2.1). Fie $\vec{\omega}_{21}$ viteza

unghiulară în această mișcare. Suportul vitezei unghiulare $\vec{\omega}_{10}$ al arborelui conține și el punctul O_1 , astfel încât avem de-a face cu o compunere de două rotații concurente.

Neexistând alunecare între bilă și elementul fix obținem de asemenea că viteza unghiulară rezultantă $\vec{\omega}_{20}$, în mișcarea bilei față de lagăr, are direcția O_1D astfel încât se poate scrie :

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}$$

(1)

Reprezentarea geometrică a relației vectoriale (1) s-a realizat în figura R 11.2.2. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul o_1ab se obține:

$$\frac{\omega_{10}}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{\omega_{20}}{\sin \alpha} = \frac{\omega_{21}}{\sin(180 - \alpha)}$$

(2)

de unde:

$$\omega_{21} = \omega_{10} \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \quad , \quad \omega_{20} = \omega_{10} \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

(3)

R 11.3) Să se studieze mișcarea unei bile de rulment într-un lagăr cilindric considerând că bila se rostogolește fără să alunece pe fusul arborelui și pe peretele lagărului (figura R

11.3.1. Se cunoaște viteza unghiulară $\vec{\omega}_{10}$ a arborelui, raza fusului R și raza r a bilei rulmentului.

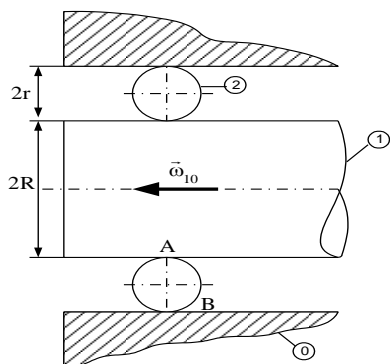


Figura R 11.3.1.

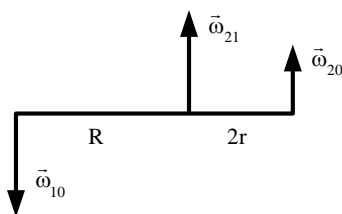


Figura R 11.3.2.

Rezolvare : Să notăm cu (0) elementul fix (lagărul), cu (1) fusul arborelui și cu (2) bila rulmentului. Axa instantanee a mișcării relative bilă-arbore trece prin A și este orizontală deoarece între bilă și arbore nu există alunecare. Fie $\vec{\omega}_{21}$ viteza unghiulară în această mișcare relativă. Deoarece și viteza unghiulară $\vec{\omega}_{10}$ a arborelui față de elementul fix este orizontală avem de-a face cu o compunere de rotații paralele.

În plus, deoarece nici între bilă și elementul fix nu există alunecare axa instantanee a mișcării absolute a bilei trece prin B. Notând cu $\vec{\omega}_{20}$ viteza unghiulară a mișcării absolute a bilei, putem scrie :

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}$$

(1)

Reprezentarea geometrică a relației (1) s-a făcut în figura R 11.3.2. Viteza unghiulară rezultantă $\vec{\omega}_{20}$ este în afara vectorilor componenți ceea ce înseamnă că rotațiile componente (paralele) sunt de sensuri contrare. Rezultanta se găsește mai aproape de componenta mai mare în modul.

Necunoscutele ω_{21} și ω_{20} se determină scriind relațiile de la compunerea vectorilor paraleli și de sens contrar (care nu formează un cuplu) :

$$\omega_{20} = \omega_{21} - \omega_{10} \quad , \quad \frac{\omega_{10}}{2r} = \frac{\omega_{21}}{R+2r} = \frac{\omega_{20}}{R}$$

(2)

Se găsește astfel că :

$$\omega_{21} = \omega_{10} \frac{R+2r}{2r} \quad , \quad \omega_{20} = \omega_{10} \frac{R}{2r}$$

(3)

R 11.4) Discul (2), de rază $R_2 = R$, se rostogolește fără să alunece peste discul (1), de rază $R_1 = 2R$, fiind condus de manivela OO_1 (figura R 11.4.1). Se cunosc vitezele unghiulare absolute ale discului (1), $\omega_{10} = \omega_0$, și manivelei (3), $\omega_{30} = \frac{2}{3} \omega_0$, unde ω_0

este o constantă pozitivă. Să se determine viteza unghiulară absolută $\vec{\omega}_{20}$ a discului (2) și accelerațiile punctelor M și N de pe disc.

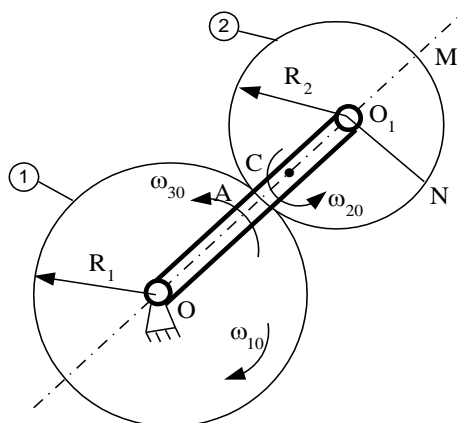


Figura R 11.4.1.

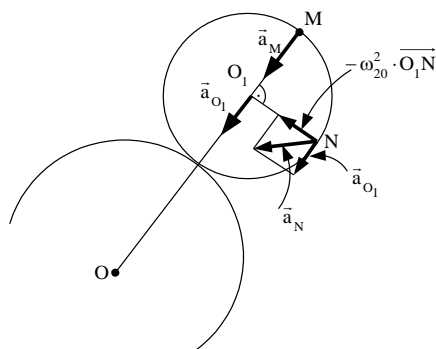


Figura R 11.4.2.

Rezolvare : Mișcările celor trei corpuri fiind rotații în plan (corpurile 1 și 3) sau mișcări plan-paralele (corpul 2) vitezele unghiulare sunt perpendiculare pe plan astfel încât mișcarea corpului (2) rezultă ca o compunere de rotații paralele :

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{30} + \vec{\omega}_{23}$$

(1)

Considerând sensul orar pentru viteza unghiulară $\vec{\omega}_{10}$ putem scrie :

$$\omega_{20} = \omega_{21} + \omega_{10} = \omega_{23} - \omega_{30}$$

(2)

Pe de altă parte, în cazul rotațiilor paralele rezultă pentru corpul (2) o rotație instantanee în jurul centrului vectorilor paraleli $\vec{\omega}$. Notând cu C acest punct, din figura R 11.4.1. se obține:

$$\omega_{20} \cdot OC = \omega_{21} \cdot OA = \omega_{23} \cdot OO_1$$

(3)

deoarece A este punctul de viteză nulă dintre corpurile (2) și (1) iar O_1 este punctul de viteză nulă dintre corpurile (2) și (3). Rezolvând sistemul format din ecuațiile (2) și (3) se obțin următoarele valori pentru necunoscutele $\omega_{21}, \omega_{23}, \omega_{20}$ și OC :

$$\omega_{21} = -5 \omega_0, \omega_{23} = -\frac{10}{3} \omega_0, \omega_{20} = -4 \omega_0, OC = \frac{5}{2} R$$

(4)

Accelerațiile punctelor M și N se obțin din relațiile :

$$\begin{aligned} \vec{a}_M &= \vec{a}_{O_1} + \varepsilon_{20} \times \vec{O_1M} + \vec{\omega}_{20} \times \left(\vec{\omega}_{20} \times \vec{O_1M} \right) \\ \vec{a}_N &= \vec{a}_{O_1} + \varepsilon_{20} \times \vec{O_1N} + \vec{\omega}_{20} \times \left(\vec{\omega}_{20} \times \vec{O_1N} \right) \end{aligned}$$

(5)

Dar :

$$\varepsilon_{20} = \frac{\partial \omega_{20}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial t} + \omega_{10} \times \omega_{21} = 0$$

(6)

deoarece vectorii $\vec{\omega}_{10}$ și $\vec{\omega}_{21}$ sunt constanți și paraleli iar :

$$\vec{\omega}_{20} \times \left(\vec{\omega}_{20} \times \vec{O_1M} \right) = -\omega_{20}^2 \cdot \vec{O_1M}, \quad \vec{\omega}_{20} \times \left(\vec{\omega}_{20} \times \vec{O_1N} \right) = -\omega_{20}^2 \cdot \vec{O_1N}$$

(7)

astfel încât obținem următoarele relații pentru determinarea accelerațiilor punctelor M și N :

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{O_1} - \omega_{20}^2 \cdot \vec{O_1M}, \quad \vec{a}_N = \vec{a}_{O_1} - \omega_{20}^2 \cdot \vec{O_1N}$$

(8)

Vectorul \vec{a}_{O_1} are direcția OO_1 , sensul de la O_1 spre O și modulul :

$$a_{O_1} = OO_1 \cdot \omega_{20}^2 = \frac{4}{3} R \omega_0^2$$

(9)

Direcțiile și sensurile accelerațiilor punctelor M și N , determinate în conformitate cu relația (8), sunt prezentate în figura R 11.4.2. iar modulele lor sunt :

$$a_M = a_{O_1} + \omega_{20}^2 \cdot O_1M = \frac{52}{3} R \omega_0^2, a_N = \sqrt{a_{O_1}^2 + \omega_{20}^4 \cdot O_1N^2} = \frac{\sqrt{2320}}{3} R \omega_0^2$$

(10)

11.6. Probleme propuse

TC 11.1) Să se determine viteza tijei (2) a mecanismului din figura TC 11.1 dacă se cunoaște viteza \vec{v}_1 a tachetului de translație (1) și unghiul de înclinare α al acestuia.

TC 11.2) Se dă mecanismul planetar din figura TC 11.2 format din roțile dințate (1), (2) și manivela (3). Roata (2) se rostogolește fără să alunece peste roata (1) și în același timp în interiorul unei suprafețe cilindrice dințate, coaxială cu roata (1). Se cunosc razele R și r ale roților (1) și (2) și viteza unghiulară $\omega_0 = \varepsilon_0 \cdot t$ a manivelei (3), unde ε_0 este o constantă pozitivă. Să se determine :

- Vitezele și accelerațiile unghiulare absolute ale roților (1) și (2) ;
- Viteza și accelerația absolută a punctului M .

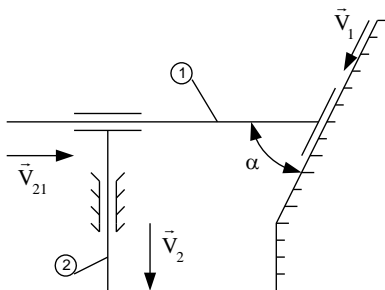


Figura TC 11.1

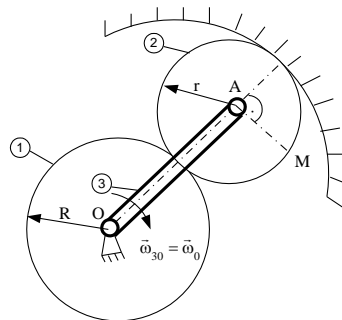
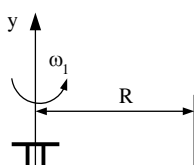


Figura TC 11.2

TC 11.3) Un disc de rază r se rotește cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}_2$ față de brațul CD care, de asemenea, se rotește cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}_1$ în jurul axei AC (figura TC 11.3). Să se determine viteza unghiulară $\vec{\omega}$ și accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ în mișcarea discului D precum și viteza \vec{v}_B și accelerația \vec{a}_B a punctului B situat pe periferia discului.



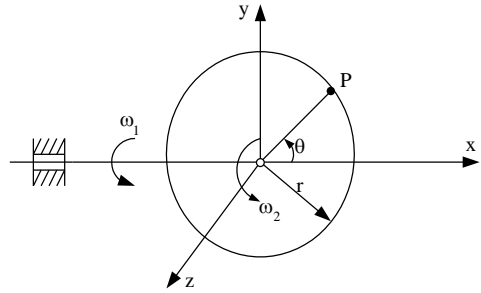


Figura TC 11.3

Figura TC 11.4

TC 11.4) Un disc de rază r fixat într-o furcă (figura TC 11.4) se rotește cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}_2$ în jurul axei sale în timp ce furca se rotește în jurul axei proprii cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_1$. Să se determine accelerația unghiulară absolută $\vec{\varepsilon}$ a discului precum și accelerația punctului P de pe periferia discului atunci când $\theta = 0^0$, respectiv $\theta = 90^0$.

11.7. Indicații și răspunsuri

TC 11.1) $v_2 = v_1 \sin \alpha$, $v_3 = v_1 \cos \alpha$;

TC 11.2) a) $\omega_{10} = \frac{2(r+R)}{r} \omega_0$, $\omega_{20} = \frac{r+R}{r} \omega_0$, $\varepsilon_{10} = \frac{2(r+R)}{r} \varepsilon_0$, $\varepsilon_{20} = \frac{r+R}{r} \varepsilon_0$;

b) $v_M = \sqrt{2}(R+r) \varepsilon_0 t$, $a_M = \frac{R+r}{r} \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0^2 t^4 [r^2 + (R+r)^2] + r^2 (1 - 2\varepsilon_0 t^2)}$;

TC 11.3) $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}$, $\vec{\varepsilon} = \omega_1 \omega_2 \vec{i}$;

$\vec{v}_B = r \omega_2 \vec{j} - (R+r) \omega_1 \vec{k}$, $\vec{a}_B = -[(R+r) \omega_1^2 + r \omega_2^2] \vec{i}$;

TC 11.4) $\vec{\varepsilon} = -\omega_1 \omega_2 \vec{j}$;

$\vec{a}_P = -r \omega_2^2 \vec{i} + 2r \omega_1 \omega_2 \vec{k}$, când $\theta = 0^0$;

$\vec{a}_P = -r(\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{j}$, când $\theta = 90^0$.

DINAMICA

Dinamica se ocupă cu studiul mișcării sistemelor de puncte materiale sau de solide rigide cu luarea în considerare a maselor elementelor componente ale sistemului analizat precum și a forțelor care acționează asupra lor. Problemele generale ale dinamicii sunt în număr de două și anume:

i) Cunoscând forțele ce acționează asupra sistemului material și condițiile inițiale (configurația sistemului și distribuția de viteze la momentul inițial) se cere să se determine mișcarea sistemului;

ii) Cunoscând mișcarea sistemului, să se determine forțele ce acționează asupra lui.

Vom începe studiul dinamicii prin analiza mișcării (absolute și relative) a punctului material (liber și cu legături).

12. Dinamica mișcării absolute a punctului material

12.1. Dinamica punctului material liber

Problemele generale ale dinamicii punctului material liber pot fi analizate folosind principiul al doilea al mecanicii, scris sub forma:

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

(12.1)

unde m este masa punctului material (constantă în timpul mișcării), \vec{a} accelerația sa iar \vec{F} rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului. În general, forța \vec{F} este o funcție de vectorul de poziție \vec{r} , viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ și timpul t , adică:

$$\vec{F} = F \left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t \right)$$

(12.2)

Observând că $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, ecuația fundamentală (12.1) se scrie ca:

$$m \ddot{\vec{r}} = F \left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t \right)$$

(12.3)

i) **Problema directă** : se cunosc forțele ce acționează asupra punctului material și se cere mișcarea sa.

Pentru studiul mișcării se integrează ecuația vectorială (12.3). În rezolvarea problemelor concrete de mecanică, ecuația (12.3) se proiectează pe axele unui sistem de coordonate convenabil ales. Avem astfel:

Sistemul de coordonate carteziene:

$$m \ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad m \ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad m \ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

(12.4)

Sistemul de coordonate Frenet:

$$m \ddot{s} = F_\tau(s, \dot{s}, t), \quad m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu(s, \dot{s}, t), \quad 0 = F_\beta(s, \dot{s}, t)$$

(12.5)

Sistemul de coordonate polare:

$$m \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) = F_r(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t), \quad m \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) = F_\theta(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t)$$

(12.6)

Ecuația fundamentală (12.3) poate fi proiectată și pe axele altor sisteme de referință (sferice, cilindrice, generalizate etc.). Diferitele forme ale ecuației diferențiale astfel obținute reprezintă un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul al doilea având ca necunoscute trei funcții scalare de timpul t (în cazul coordonatelor carteziene acestea sunt $x(t)$, $y(t)$ și $z(t)$). Considerând că sistemul poate fi integrat soluțiile obținute vor depinde de timpul t și de șase constante de integrare.

Vom folosi în cele de urmează cel mai utilizat sistem de coordonate și anume cel de coordonate carteziene. Soluția sistemului (12.4), numită *soluție generală*, este de forma:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned},$$

(12.7)

$$z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).$$

În aplicații prezintă interes acea soluție, numită *soluție particulară*, care satisface condițiile inițiale ale mișcării, referitoare la poziția și viteza punctului la momentul inițial:

$$t = 0: x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = v_{0x}, \dot{y} = v_{0y}, \dot{z} = v_{0z} \quad (12.8)$$

Impunând condițiile (12.8), din (12.7) rezultă:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y_0 &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z_0 &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ v_{0x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ v_{0y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ v_{0z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \quad (12.9)$$

Cele șase ecuații (12.9) constituie un sistem de ecuații algebrice în necunoscutele $C_i, i = \overline{1,6}$. Rezolvând acest sistem obținem valorile constantelor de integrare în funcție de datele inițiale ale mișcării:

$$C_i = C_i(x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \quad i = \overline{1,6} \quad (12.10)$$

Înlocuind (12.10) în (12.7) obținem soluția particulară:

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Setul de relații (12.11) corespunde ecuațiilor parametrice ale mișcării (vezi capitolul “Cinemática mișcării punctului material”).

ii) **Problema inversă:** Se cunoaște mișcarea punctului și se cer forțele care-l acționează.

Cunoscând vectorul $\vec{r} = \vec{r}(t)$ se obțin funcțiile vectoriale $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$ și $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t)$.

Ecuația (12.3) permite determinarea rezultantei $\vec{F} = m\vec{a}$ în mod unic, însă această expresie nu ne dă nici o indicație asupra naturii fizice a rezultantei (există o infinitate de sisteme de forțe care au aceeași rezultantă).

12.2. Dinamica mișcării absolute a punctului material cu legături

În studiul mișcării unui punct material legat se procedează ca în statică, mai precis se aplică axioma legăturilor înlocuind fiecare legătură cu reacțiunea corespunzătoare ei și se tratează problema ca și când punctul material ar fi liber.

Notând cu \vec{R}' rezultanta forțelor de legătură și cu \vec{F} rezultanta forțelor direct aplicate, ecuația de mișcare a punctului material supus la legături este:

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{R}'$$

(12.12)

Prin proiectarea acestei ecuații pe axele unui sistem de referință convenabil ales se obține un sistem de ecuații diferențiale de ordin doi la care necunoscutele se referă la mișcare și la forțele de legătură. Pentru determinarea mișcării se determină variația în timp a unui parametru de poziție (pentru punct pe curbă) sau a doi parametri de poziție (pentru punct pe suprafață). Determinarea reacțiunilor se face în general prin proiectarea ecuației (12.12) pe direcția normală sau tangentă la curba sau la suprafața de reazem.

12. 3. Probleme rezolvate

R 12.1) Să se determine viteza inițială v_0 și unghiul sub care trebuie lansat un proiectil din punctul O pentru a lovi normal la înălțimea $AB = h$ un perete vertical AB situat la distanța $OA = 2h$. Se neglijează rezistența aerului (figura R 12.1.1).

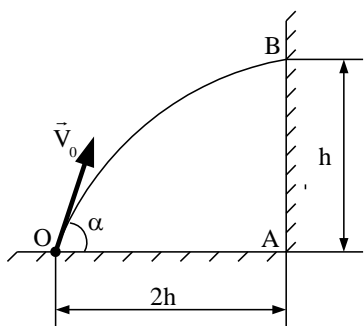


Figura R 12.1.1

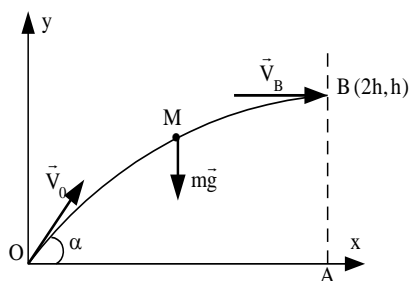


Figura R 12.1.2

Rezolvare: Fie x și y coordonatele punctului M la momentul de timp t (figura R 12.1.2). Avem:

$$\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 t + C_2 \\ y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + C_3 t + C_4 \end{cases}$$

Utilizând condițiile inițiale:

$$t=0 : \begin{cases} x=0, y=0 \\ v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha, v_y = \dot{y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

se obțin constantele:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, C_2 = 0, C_3 = v_0 \sin \alpha, C_4 = 0.$$

Mișcarea este descrisă astfel de ecuațiile parametrice:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Prin eliminarea timpului t se obține curba de mișcare (o parabolă):

$$(C): y(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

Dar $B(2h, h) \in (C)$ conduce la $y(2h) = h, \frac{dy}{dx}(2h) = 0$ (*). A doua condiție (*)

este consecința orizontalității vectorului viteză (tangent la traiectorie) în punctul de impact cu peretele. Condițiile (*) conduc la sistemul:

$$-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} (2h)^2 + 2h \tan \alpha = h, \quad -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} (2h) + \tan \alpha = 0,$$

cu soluția:

$$v_0 = 2\sqrt{gh}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

R 12.2) Punctul M, de masă m , se mișcă fără frecare pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală și este atras de punctul O cu o forță proporțională cu distanța OM, coeficientul de proporționalitate fiind $K = k \cdot m$, unde k este o constantă pozitivă (figura R 12.2.1). Știind că la momentul inițial punctul M se află în repaus în A și că distanța AO = l , se cer:

- Legea de mișcare $AM = x(t)$ și valoarea reacțiunii normale pe plan;
- Viteza cu care mobilul ajunge în B.

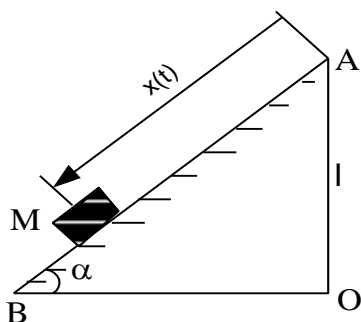


Figura R 12.2.1

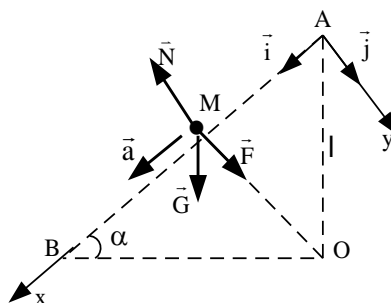


Figura R 12.2.2

Rezolvare: a) Poziția mobilului la momentul de timp t este dată de $AM = x(t)$. Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie sub forma:

$$\vec{m} \vec{a} = \vec{G} + \vec{F} + \vec{N}$$

(1)

unde \vec{N} este reacțiunea normală iar $\vec{F} = -K \cdot \vec{OM} = -k m \left[(x - l \sin \alpha) \vec{i} - l \cos \alpha \vec{j} \right]$

este forța cu care punctul M atrage mobilul (figura R 12.2.2). Proiectând ecuația (1) pe axele reperului Axy se obține:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = m g \sin \alpha - k m (x - l \sin \alpha) \\ 0 = m g \cos \alpha + k m l \cos \alpha - N \end{cases}$$

(2)

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

$$t = 0 : x = 0, \dot{x} = 0$$

(3)

Din prima ecuație (2) și din (3) rezultă legea de mișcare:

$$x(t) = AM = \frac{g + k l}{k} (1 - \cos \sqrt{k} t) \sin \alpha$$

(4)

iar din a doua ecuație (2) reacțiunea normală pe plan:

$$N = m (g + k l) \cos \alpha$$

(5)

b) Timpul necesar străbaterii distanței AB este dat de relația:

$$AB = \frac{l}{\sin \alpha} = x(t_B) = \frac{g + k l}{k} (1 - \cos \sqrt{k} t_B) \sin \alpha$$

(6)

Rezultă:

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{k} t_B &= 1 - \frac{k l}{(g + k l) \sin^2 \alpha} \\ v(t) = \dot{x}(t) &\stackrel{(4)}{=} \frac{g + k l}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} t \sin \alpha \end{aligned}$$

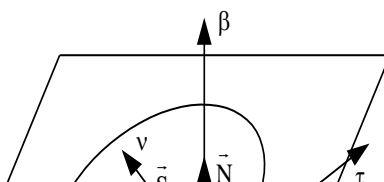
(7)

$$v_B = v(t_B) = \frac{g + k l}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} t_B \sin \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{2 l (g + k l) \sin^2 \alpha - k l^2}.$$

R 12.3) O bilă punctiformă de masă m este legată printr-un fir inextensibil de lungime l și se mișcă pe un plan orizontal având coeficientul de frecare μ (figura R 12.3.1).

a) Să se determine valoarea tensiunii din fir și a vitezei bilei într-o poziție oarecare dată prin unghiul θ dacă viteza inițială de lansare a bilei este perpendiculară pe direcția firului întins și are valoarea v_0 ;

b) Ce valoare ar trebui să aibă viteza v_0 dacă după parcurgerea unei circumferințe complete bila se oprește?



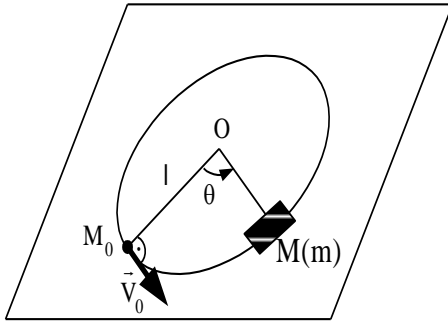


Figura R 12.3.1

Figura R 12.3.2

Rezolvare: a) Proiecțiile ecuației fundamentale pe axele triedrului Frenet $M\tau \vee \beta$ (figura R 12.3.2) sunt:

$$(1a) \quad M\tau : m \ddot{s} = -T$$

$$(1b) \quad M\nu : m \frac{\dot{s}^2}{l} = S$$

$$(1c) \quad M\beta : 0 = N - m g$$

$$(2) \quad T = \mu N$$

unde $s = l \theta$ este lungimea arcului de cerc $M_0 M$, N este reacțiunea normală, T forța de frecare de alunecare și S tensiunea din fir.

Din (1a), (1c) și (2), prin integrare, se obține:

$$(3) \quad s(t) = -\frac{\mu g}{2} t^2 + C_1 t + C_2$$

Condițiile inițiale sunt:

$$(4) \quad t = 0 : s = 0, \dot{s} = v_0$$

Din (3) și (4) găsim valorile $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, astfel încât legile mișcării pe cercul $C(O, l)$ sunt:

$$(5) \quad s = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2, \quad v = \dot{s} = v_0 - \mu g t, \quad a_\tau = -\mu g$$

Din primele două ecuații (5) se obține viteza într-o poziție oarecare dată prin unghiul θ :

$$v^2 = v_0^2 - 2 \mu g s = v_0^2 - 2 \mu g l \theta$$

(6)

iar din (1b) expresia tensiunii din fir:

$$S(\theta) = \frac{m}{l} (v_0^2 - 2 \mu g l \theta)$$

(7)

b) Condiția de oprire după parcurgerea unei circumferințe:

$$\theta = 2\pi \Rightarrow v(\theta) = 0$$

(8)

impune valoarea vitezei de lansare:

$$v_0 = 2\sqrt{\pi \mu g l}$$

(9)

R 12.4) Un punct material de masă m este atras de centrul atractiv O cu o forță invers proporțională cu puterea a treia a distanței de la el la centrul O , $\vec{F} = -\frac{5m}{r^4} \vec{r}$. În

momentul inițial mobilul se află în punctul M_0 dat prin $OM_0 = r_0$ și are valoarea v_0 , înclinată cu unghiul α față de direcția OM_0 (figura R 12.4). Se cer:

- Ecuatiile diferențiale ale mișcării în coordonate polare;
- Constanta ariilor;
- Ecuatiile parametrice ale mișcării;
- Componentele vitezei în coordonate polare;
- Ecuția traiectoriei în coordonate polare.

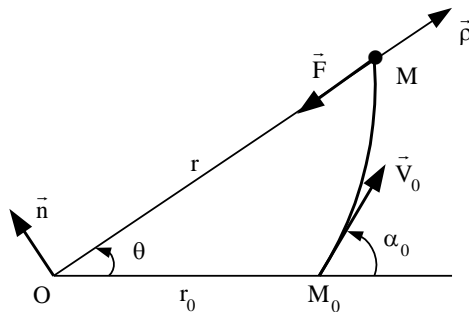


Figura R 12.4

Rezolvare: a) Ecuția fundamentală $m \vec{a} = \vec{F}$ se proiectează pe axele sistemului de coordonate polare $\rho O n$:

$$m \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) = -\frac{5m}{r^3}, \quad m \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) = 0$$

(1)

b) Înmulțind prima ecuație diferențială cu r obținem:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = r v_n = C = \text{constant}$$

(2)

Constanta C se numește *constantă ariilor* și se obține din condițiile inițiale:

$$t = 0 : v_n = v_0 \sin \alpha = 1 \text{ m/s}, r = r_0 = 2 \text{ m}$$

(3)

$$\text{Rezultă } C = r_0 v_0 \sin \alpha = 2 \text{ m}^2/\text{s}.$$

c) Din prima ecuație (1) și din (2) se obține ecuația diferențială $\ddot{r} + \frac{1}{r^3} = 0$, care se

multiplică prin $2\dot{r}$ pentru a determina necunoscuta $r(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow \dot{r}^2 - \frac{1}{r^2} = C_1 \Rightarrow \dot{r} = \pm \frac{\sqrt{C_1 r^2 + 1}}{r} \Rightarrow r(t) = \frac{\sqrt{16 - t^2}}{2}$$

(4)

Variația cu timpul a unghiului polar θ se obține din condițiile inițiale (3) și ecuația (2). Se găsește că:

$$\theta(t) = \ln \frac{4+t}{4-t}$$

(5)

$$\text{d) } v_\rho = \dot{r} = -\frac{t}{2\sqrt{16-t^2}}, \quad v_n = r \dot{\theta} = \frac{4}{\sqrt{16-t^2}}$$

(6)

e) Eliminând timpul t între ecuațiile parametrice (4) și (5) se obține ecuația traiectoriei în coordonate polare:

$$r(\theta) = \frac{4 \exp\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\exp(\theta) + 1}$$

(7)

care este o spirală în planul $\rho O n$.

12.4. Probleme propuse

12.4.1. Teste clasice

TC 12.1) Punctul material P, de masă m , se mișcă în planul vertical Oxy, fiind acționat de greutatea sa și de forța elastică $\vec{F} = -k \cdot \vec{OP}$, unde k este o constantă pozitivă (figura TC 12.1.1). În momentul inițial mobilul se află în punctul A pe axa verticală ($OA = h$) și are viteza \vec{v}_0 orizontală. Cunoscând valorile m, k, h, v_0 , să se determine:

a) Ecuațiile diferențiale ale mișcării;

b) Ecuațiile parametrice ale mișcării;

c) Traectoria mișcării;

d) Poziția, viteza și accelerația mobilului la momentul de timp $t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$.

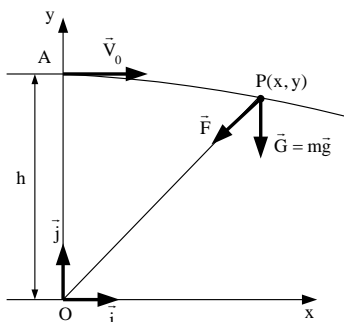


Figura TC 12.1.1

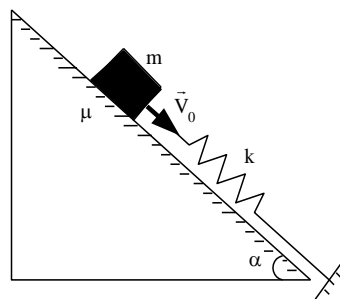


Figura TC 12.2.1

TC 12.2) Pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală se află un corp de masă m și un resort de constantă elastică k (figura TC 12.2.1). Între corp și plan există frecare de coeficient de frecare μ . La momentul inițial, atunci când corpul se găsește în contact cu

arcul aflat în stare naturală (neîntins sau necomprimat), i se imprimă corpului viteza \vec{v}_0 în sensul comprimării arcului. Se cer:

- Legea de mișcare a corpului atunci când acesta coboară;
- Timpul cât durează mișcarea (până la oprirea corpului);
- Distanța parcursă până la oprire.

Se presupune că $\mu > \tan \alpha$.

TC 12.3) Pe un cilindru fix de rază R se deplasează fără frecare un punct material de masă m (figura TC 12.3). La începutul mișcării mobilul se găsea în punctul A și avea viteza inițială orizontală \vec{v}_0 . Se cer:

- Să se determine legile de variație $v = v(\theta)$, $a_\tau = a_\tau(\theta)$, $a_\nu = a_\nu(\theta)$ pentru intervalul de timp în care mobilul se află în contact cu cilindrul;
- Unghiul $\theta = \alpha$ la care se produce desprinderea mobilului de pe suprafața cilindrului;
- Pentru cazul particular $v_0 = 0$, să se determine distanța $OC = \xi$, punctul C fiind punctul în care mobilul lovește solul.

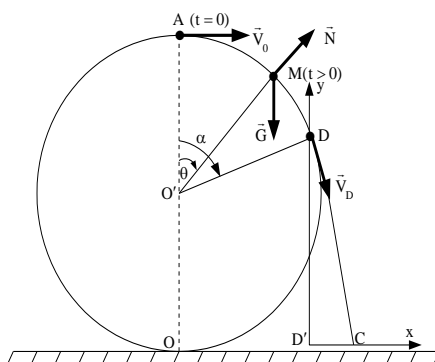


Figura TC 12.3
12.4.2. Teste grilă

TG 12.1) Cu ajutorul unei macarale se ridică pe verticală o mașină cu greutatea $G=10\text{ kN}$ în timpul $t=10\text{ s}$, la o înălțime $h=12\text{ m}$. Se consideră că viteza inițială a greutății este nulă și că $g=10\text{ m/s}^2$. Intensitatea forței, presupusă constantă, aplicată sarcinii este :

a) $F=10,24\text{ kN}$; b) $F=12\text{ kN}$; c) $F=9,5\text{ kN}$; d) $F=11,95\text{ kN}$.

TG 12.2) Intensitatea forței F , cu care trebuie frânat un automobil de 7 kN pentru ca după 10 s viteza lui de 60 km/h să fie redusă la jumătate este :

a) 325 N ; b) 175 N ; c) $594,6\text{ N}$; d) 372 N .

12.5. Indicații și răspunsuri

TC 12.1) a) Expresia forței elastice în funcție de coordonatele x și y ale punctului P este $\vec{F} = -kx\vec{i} - ky\vec{j}$. Ecuația fundamentală, $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{G}$, se proiectează pe Ox și Oy și se obțin ecuațiile diferențiale liniare de ordin doi cu coeficienți constanți:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad , \quad \ddot{y} + p^2 y = -g$$

(1)

unde $p^2 = \frac{k}{m}$.

a) Integrând sistemul (1) în condițiile inițiale :

$$t=0 : \quad x=0, \quad y=h, \quad \dot{x}=v_0, \quad \dot{y}=0$$

(2)

deducem ecuațiile parametrice:

$$x(t) = \frac{v_0}{p} \sin pt \quad , \quad y(t) = \left(h + \frac{g}{p^2} \right) \cos pt - \frac{g}{p^2}$$

(3)

b) Traectoria mișcării este elipsa de ecuație:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v_0}{p} \right)^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{p^2} \right)^2}{\left(h + \frac{g}{p^2} \right)^2} = 1.$$

Reprezentarea ei este dată în figura TC 12.1.2.

c) Vezi “Cinematica mișcării absolute a punctului material”.

Poziția: $x = \frac{v_0}{p}$, $y = -\frac{g}{p^2}$.

Viteza: $v_x = 0$, $v_y = -p\left(h + \frac{g}{p^2}\right)$.

Accelerația: $a_x = -v_0/p$, $a_y = 0$.

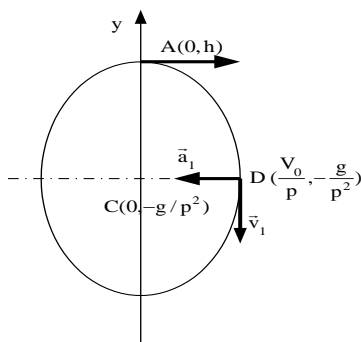


Figura TC 12.1.2

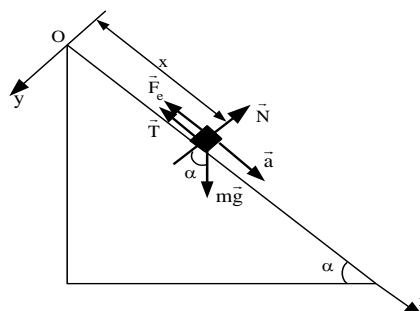


Figura TC 12.2.2

TC 12.2) a) Proiecțiile ecuației fundamentale pe axele reperului Oxy (figura TC 12.2.2) sunt:

$$m \ddot{x} = m g \sin \alpha - T - F_{el} \quad , \quad 0 = N - m g \cos \alpha$$

(1)

unde N este reacțiunea normală, $T = \mu N$ forța de frecare iar $F_{el} = k x$ forța elastică corespunzătoare deformării resortului. Din (1) se obține ecuația diferențială neomogenă de ordin doi:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

(2)

cu soluția:

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{g m}{k} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

(3)

b) Fie $t = t_1$ timpul cât durează mișcarea. Se impune condiția : $t = t_1, \dot{x} = 0$. Rezultă

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha} \right)$$

(4)

c) $D = x(t_1)$, unde $x(t_1)$ se determină din (3) și (4).

TC 12.3) a) La un moment arbitrar de timp t mobilul se găsește în punctul M, astfel încât $m \left(\widehat{AOM} \right) = \theta$. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic, aplicată între punctele A și M permite obținerea dependenței vitezei mobilului cu unghiul θ :

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 g R (1 - \cos \theta)}$$

(1)

Ecuția fundamentală, $m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N}$, se proiectează pe tangenta la traiectorie și se obține variația accelerației tangențiale cu unghiul θ :

$$a_\tau = g \sin \theta$$

(2)

Componenta normală a accelerației rezultă din relația cinematică $a_v = \frac{v^2}{R}$. Deci:

$$a_v = \frac{v_0^2}{R} + 2 g (1 - \cos \theta)$$

(3)

b) Dependența reacțiunii normale cu unghiul θ : se obține proiectând ecuația fundamentală pe normala la cilindru în M. Rezultă:

$$N = m g (3 \cos \theta - 2) - \frac{m v_0^2}{R}$$

(4)

În momentul desprinderii reacțiunea normală se anulează (mobilul nu mai apasă pe cilindru) iar $\theta = \alpha$, astfel încât: din (4) găsim că:

$$\alpha = \arccos \frac{v_0^2 + 2 g R}{3 g R}$$

(5)

c) În ipoteza $v_0 = 0$, viteza pe care o are mobilul în punctul de desprindere D este

$v_D = \sqrt{\frac{2 g R}{3}}$ iar unghiul pe care îl face vectorul viteză cu verticala este

$90 - \alpha = 90 - \arccos \frac{2}{3}$. Din momentul desprinderii (considerat ca moment $t = 0$) și până

la atingerea solului în C singura forță care acționează asupra mobilului este greutatea proprie. Ecuția fundamentală, $m \vec{a} = \vec{G}$, și condițiile inițiale:

$$t = 0 : x = 0, y = R(1 + \cos \alpha), v_x = v_D \cos \alpha, v_y = -v_D \sin \alpha,$$

permit determinarea distanței D'C până la atingerea solului:

$$D'C = \frac{4(5\sqrt{2} - \sqrt{5})}{27} R$$

(6)

Cum $OD' = R \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} R$, găsim că:

$$\xi = OC = OD' + D'C = \frac{5(4\sqrt{2} + \sqrt{5})}{27} R$$

(7)

TG 12.1) Mișcarea greutății este rectilinie uniform variată, cu accelerația $a = \frac{F - G}{m}$.

Utilizând legea spațiului în această mișcare, deducem că $h = \frac{a t^2}{2}$, de unde:

$$F = G \left(1 + \frac{2h}{g t^2} \right) = 10,24 \text{ kN}.$$

Răspuns corect: **a**).

TG 12.2) Mișcarea automobilului este rectilinie uniform încetinită, cu accelerația $a = -\frac{F}{m} = -\frac{F}{G} g$. Adăugând și legea vitezei în această mișcare, $v = v_0 + a t$, obținem:

$$F = \frac{G}{g t} (v_0 - v) = \frac{7000}{9,8 \cdot 10} \cdot (60 - 30) \cdot \frac{1000}{3600} = 594,6 \text{ N}.$$

Răspuns corect: **c**).

13. Dinamica mișcării relative a punctului material

13.1. Ecuația fundamentală a mișcării relative

Ecuația fundamentală a mișcării absolute a punctului material

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

(13.1)

descrie mișcarea acestuia față de un reper fix. În relația (13.1), \vec{a} este accelerația absolută. Din cinematica mișcării relative a punctului material se cunoaște că:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$$

(13.2)

unde $\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}$ este accelerația relativă, $\vec{a}_t = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ este

accelerația de transport iar $\vec{a}_C = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r$ este accelerația Coriolis. Din (13.1) și (13.2) se obține:

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C) = \vec{F} \Leftrightarrow m \vec{a}_r = \vec{F} + (-m \vec{a}_t) + (-m \vec{a}_C)$$

(13.3)

Notând:

$$-m \vec{a}_t = \vec{F}_t \quad , \quad -m \vec{a}_C = \vec{F}_C$$

(13.4)

din (13.3) găsim că:

$$m \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_C$$

(13.5)

Ecuția (13.5) reprezintă *ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material*. Vectorii \vec{F}_t și \vec{F}_C , având dimensiunile unor forțe, poartă numele de *forță complementară de transport* și *forță complementară Coriolis*. Ei corectează ecuația fundamentală $m \vec{a} = \vec{F}$ atunci când studiul mișcării se face față de un reper mobil.

13.2. Repaus relativ

Este posibil ca punctul material să fie în echilibru (relativ) față de reperul mobil și să se miște, odată cu acesta, față de reperul fix. Pentru aceasta va trebui ca viteza sa relativă \vec{v}_r să fie nulă ceea ce are drept consecințe:

$$\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} = \vec{0} \quad , \quad \vec{F}_C = -m \vec{a}_C = -m \left(2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r \right) = \vec{0}$$

(13.6)

Din (13.5) și (13.6) se obține condiția repausului relativ:

$$\vec{F} + \vec{F}_t = \vec{0}$$

(13.7)

adică punctul material rămâne în repaus față de reperul mobil în acea poziție în care forțele direct aplicate și forța complementară de transport își fac echilibrul.

13.3. Sisteme inerțiale

Vom deduce în acest subcapitol condițiile în care ecuația fundamentală a dinamicii are aceeași formă ((12.1)) indiferent dacă ea este scrisă față de reperul fix sau față de cel mobil.

Pentru aceasta se impune condiția:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_C = \vec{0}$$

(13.8)

sau

$$\vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{0}$$

(13.9)

Condiția (13.9) va trebui verificată indiferent de punctul în care se găsește mobilul și de viteza sa relativă. Considerând două puncte materiale care au aceeași poziție (același \vec{r}) dar viteze relative diferite (\vec{v}_r' și \vec{v}_r'') și impunându-le condiția (13.9) găsim :

$$\begin{aligned}\vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r' &= \vec{0} \\ \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r'' &= \vec{0} .\end{aligned}$$

Scăzând aceste relații obținem $2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_r' - \vec{v}_r'') = \vec{0}$ și cum $\vec{v}_r' \neq \vec{v}_r''$ rezultă:

$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

(13.10) În plus,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

(13.11)

Condițiile (13.10)-(13.11) fac ca relația (13.9) să se reducă la:

$$\vec{a}_O = \vec{0}$$

(13.12)

În concluzie, pentru ca ecuația fundamentală a dinamicii să-și păstreze forma și atunci când este scrisă față de un reper mobil este necesar ca sistemul mobil să se afle într-o mișcare de translație ($\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} = \vec{0}$) rectilinie și uniformă ($\vec{a}_O = \vec{0}$) față de reperul fix sau, în particular, să fie în repaus.

Sistemele de referință care îndeplinesc această condiție se numesc *sisteme inerțiale*.

13.4. Probleme rezolvate

R 13.1) Bara cotită OAB se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în plan orizontal. Pe porțiunea AB se deplasează fără frecare un inel M, de masă m (figura R 13.1.1). Știind că $m(\widehat{OAB}) = 90^\circ$, $AB = l$ și că la momentul inițial inelul a fost lansat cu viteza \vec{v}_0 din punctul A, să se determine:

- Legea de mișcare a inelului pe bara AB;
- Valoarea reacțiunii barei pentru o poziție oarecare a inelului pe bară.

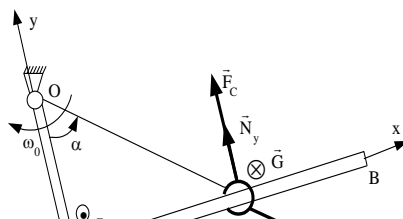
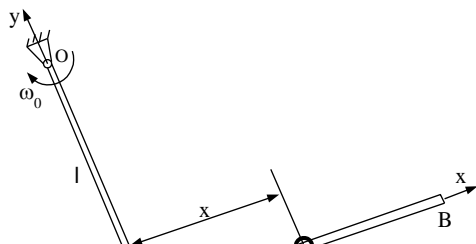


Figura R 13.1.1

Figura R 13.1.2

Rezolvare: a) Mișcarea relativă a inelului M este o mișcare rectilinie în lungul barei AB, caracterizată prin viteza relativă $v_r = \dot{x}$ și accelerația relativă $a_r = \ddot{x}$. Mișcarea de transport este o mișcare circulară uniformă cu viteza unghiulară ω_0 , pe un cerc de centru O și rază $OM = \sqrt{l^2 + x^2}$. Accelerația de transport are numai componenta normală, de modul $a_t = OM \cdot \omega_0^2$ (figura R 13.1.2).

Eliberând inelul M de legătura sa cu bara obținem următoarea ecuație vectorială a mișcării relative:

$$m \vec{a}_r = \vec{G} + \vec{N}_y + \vec{N}_z + \vec{F}_t + \vec{F}_C$$

(1)

unde:

$\vec{G} = -m g \vec{k}$ - este forța de greutate;

$\vec{N}_y = N_y \vec{j}$, $\vec{N}_z = N_z \vec{k}$ - sunt proiecțiile reacțiunii normale pe direcțiile Ay și Az;

$\vec{F}_t = m \vec{a}_t = m a_t \sin \alpha \vec{i} - m a_t \cos \alpha \vec{j}$ - este forța complementară de transport;

$\vec{F}_C = -m \vec{a}_C = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m \omega_0 v_r \vec{j}$ - este forța complementară Coriolis.

Proiectând ecuația vectorială (1) pe axele triedrului Axyz obținem următoarele ecuații scalare:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= m a_t \sin \alpha \\ 0 &= N_y - m a_t \cos \alpha + 2m \omega_0 v_r \end{aligned}$$

(2)

$$0 = -m g + N_z$$

Observând că $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$, $\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$, din prima ecuație a

sistemului (2) se găsește ecuația diferențială a mișcării inelului pe bară:

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$$

(3)

a cărei soluție generală este:

$$x(t) = A \cdot \exp(\omega_0 t) + B \cdot \exp(-\omega_0 t)$$

(4)

Constantele de integrare rezultă din condițiile inițiale $t=0: x=0, \dot{x}=v_0$. Se găsesc valorile $A=-B=\frac{v_0}{2\omega_0}$, astfel încât legea mișcării relative a inelului M pe bară este:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sh}(\omega_0 t)$$

(5)

b) Din ultimele doua ecuații ale sistemului (2) se obțin proiecțiile reacțiunii normale:

$$N_y = m(l\omega_0^2 - 2\omega_0 v_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)) \quad , \quad N_z = mg$$

(6)

astfel încât valoarea reacțiunii la momentul de timp t este dată de relația:

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = m\sqrt{g^2 + [l\omega_0^2 - 2\omega_0 v_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)]^2}$$

(7)

R 13.2) Un disc orizontal se rotește cu viteza unghiulară ω_0 în jurul axului său. La un moment dat este lăsat liber pe suprafața discului un punct material de masă m la raza r_0 față de ax și având viteza inițială nulă în raport cu suprafața discului (figura R 13.2.1). Neglijând frecarea dintre punct și disc, să se determine mișcarea punctului în raport cu suprafața discului.

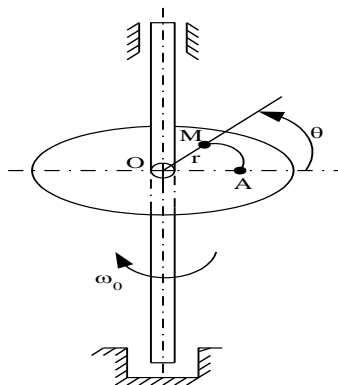


Figura R 13.2.1

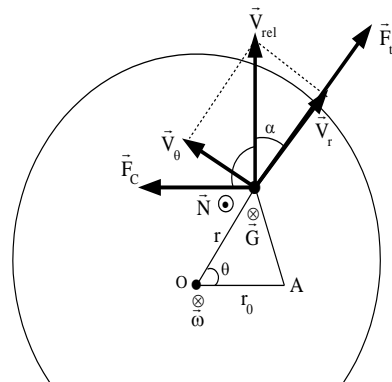


Figura R 13.2.2

Rezolvare: Studiul mișcării punctului material va fi făcut într-un sistem de coordonate polare (r, θ) , în care $r = OM$ este distanța punctului la ax iar $\theta = \angle AOM$ este unghiul făcut de “raza” punctului M cu direcția inițială OA (figura R 13.2.2). Ecuația vectorială a mișcării relative este:

$$m \vec{a}_r = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_t + \vec{F}_C$$

(1)

Deoarece viteza unghiulară a discului este constantă rezultă că accelerația de transport va avea nenulă numai componenta normală $a_t^v = r \omega_0^2$, astfel încât forța complementară de transport va fi dirijată pe raza OM, de la O către M și va avea modulul $F_t = m r \omega_0^2$. Forța complementară Coriolis este dată de relația:

$$\vec{F}_C = -2 \vec{\omega} \times \vec{v}_{relativa} = -2 m \vec{\omega} \times \left(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta \right)$$

(2)

unde \vec{v}_r și \vec{v}_θ sunt componentele vitezei relative pe axele sistemului de coordonate polare. Forța complementară este, în consecință, perpendiculară pe vectorul viteză relativă, se găsește în planul discului și are modulul:

$$F_C = 2 m \omega_0 \sqrt{\left(\dot{r} \right)^2 + \left(r \dot{\theta} \right)^2}$$

(3)

Proiectând ecuația (1) pe axele sistemului de coordonate polare se obțin ecuațiile:

$$m \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) = F_t - F_C \sin \alpha, \quad m \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) = F_C \cos \alpha$$

(4)

Observând că:

$$\sin \alpha = \frac{r \dot{\theta}}{\sqrt{\left(\dot{r} \right)^2 + \left(r \dot{\theta} \right)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\left(\dot{r} \right)^2 + \left(r \dot{\theta} \right)^2}}$$

(5)

ecuațiile (4) pot fi aduse la forma:

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = r \omega_0^2 - 2 r \omega_0 \dot{\theta}, \quad r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = 2 \omega_0 \dot{r}$$

(6)

Înmulțind cu r a doua ecuație a sistemului (6) ea se rescrie sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\theta} \right) = \frac{d}{dt} (r^2 \omega_0)$$

(7)

de unde, prin integrare, găsim:

$$\dot{\theta} = \omega_0 + \frac{C}{r^2}$$

(8)

Condițiile inițiale:

$$t=0 : \begin{cases} r=r_0, \theta=0 \\ \dot{r}=0, \dot{\theta}=0 \end{cases}$$

(9)

permit obținerea valorii constantei C și anume $C = -\omega_0 r_0^2$, astfel încât rezultă ecuația:

$$\dot{\theta} = \omega_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

(10)

Din (10) și prima ecuație a sistemului (6) deducem următoarea ecuație diferențială în necunoscuta $r(t)$:

$$\ddot{r} - \frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^3} = 0$$

(11)

Înmulțind această ultimă ecuație cu $2\dot{r}$ ea se pune sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{r}^2 + \frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^2} \right) = 0$$

(12)

de unde, după aflarea constantei de integrare, găsim că:

$$\dot{r} = \omega_0 r_0 \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}$$

(13)

Integrând ecuația cu variabile separabile (13) se găsește dependența $r = r(t)$:

$$r = r_0 \sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$$

(14)

În fine, din relațiile (10) și (14) se obține a doua ecuație parametrică a mișcării punctului material în coordonate polare:

$$\theta(t) = \omega_0 t - \arctg(\omega_0 t)$$

(15)

R 13.3) Un vas conic având unghiul la vârf 2α se rotește în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω . Pe peretele interior al vasului se află în repaus o bilă de masă m (figura R 13.3.1). Să se determine pozițiile de echilibru relativ ale bilei și reacțiunea normală în aceste puncte.

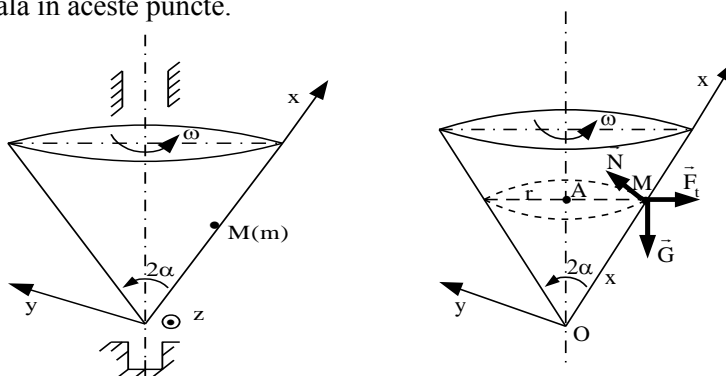


Figura R 13.3.1

Figura R 13.3.2

Rezolvare: Eliberând bila de legătura sa cu peretele vasului și introducând reacțiunea normală \vec{N} , ecuația de echilibru relativ are forma:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_t = \vec{0}$$

(1)

Atașăm vasului conic în mișcare sistemul de referință mobil $Oxyz$ (figura R 13.3.2) având axa Ox în lungul generatoarei pe care se găsește bila în repaus relativ la distanța $OM = x$. Mișcarea de transport este o mișcare circulară cu viteza unghiulară constantă ω , pe cercul de centru A și rază $r = x \sin \alpha$ și, în consecință, accelerația de transport are nenulă doar componenta normală $a_t^v = r \omega^2$. Forța complementară de transport \vec{F}_t va fi orizontală, de sens opus accelerației de transport și de modul $F_t = m r \omega^2$.

Proiectând ecuația vectorială (1) pe axele Ox și Oy se obțin următoarele ecuații scalare:

$$m x \omega^2 \sin \alpha - m g \cos \alpha = 0$$

(2)

$$N - m g \sin \alpha = m r \omega^2 \cos \alpha = 0$$

(3)

Din ecuația (2) se obține $x = \frac{g \tan \alpha}{\omega^2} = \text{constant}$, ceea ce înseamnă că bila se găsește în echilibru relativ în toate punctele cercului de rază $r = x \sin \alpha$, unde distanța x este dată de relația de mai sus. Din ecuația (3) se obține valoarea reacțiunii normale în punctele de echilibru relativ:

$$N = \frac{m g}{\sin \alpha}$$

(4)

R 13.4) Un punct material M , aflat în emisfera nordică, este lăsat să cadă liber de la înălțimea H , care este mică în raport cu raza Pământului. Considerând că greutatea $P = mg$ a punctului este constantă în timpul căderii și neglijând rezistența aerului, să se determine deviația ε spre est, când punctul ajunge la sol, față de verticala ce trece prin poziția inițială M_0 (figura R 13.4).

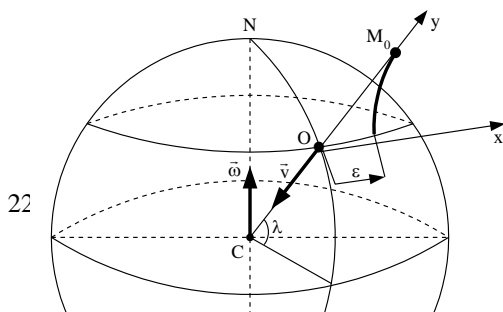
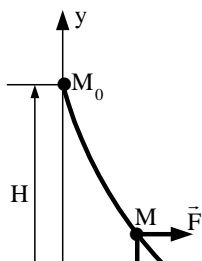


Figura R 13.4

Rezolvare: Se alege un sistem de referință cartezian cu axa Oy orientată după verticala poziției inițiale a punctului material (după raza Pământului) iar axa Ox orientată spre est.

Pentru a ține seama de mișcarea de rotație a Pământului, în afara greutății P va trebui să introducem și forțele complementare Coriolis și de transport. În calculul forței complementare Coriolis vom neglija componenta v_x a vitezei relative a punctului material, ea fiind mult mai mică decât componenta v_y . Deci, $v_r = v_y$ (către centrul Pământului C). În plus vom considera neglijabilă și forța complementară de transport, care provoacă o mică deviație pe direcția razei CO. Ecuația diferențială a mișcării relative

a punctului, $m \vec{a}_r = \vec{P} + \vec{F}_C$, se proiectează pe Ox și Oy și se găsește:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_C, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

(1)

Soluția generală a celei de-a doua ecuații diferențiale (1) este:

$$y(t) = H - \frac{g t^2}{2}$$

(2)

S-a ținut cont de condițiile inițiale $t=0: x=0, y=H$. În plus, $v_r = v_y = \frac{dy}{dt} = -gt$. Pentru calculul modulului forței Coriolis trebuie observat că viteza relativă \vec{v}_r a punctului face unghiul $90^\circ - \lambda$ cu axa de rotație a Pământului, unde λ este unghiul de latitudine. În concluzie, $F_C = 2m\omega g t \cos \lambda$ și, din integrarea primei ecuații (1), găsim:

$$x(t) = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda \cdot t^3$$

(3)

Ecuațiile (2) și (3) formează setul de ecuații parametrice al mișcării. Mișcarea nu este rectilinie și punctul în cădere va avea o deviație spre est. Ecuația traiectoriei relative a punctului material se obține prin eliminarea variabilei timp t între cele două ecuații parametrice. Se găsește parabola semi - cubică:

$$x^2 = \frac{8}{9} \frac{\omega^2}{g} \cos^2 \lambda (H - y)^3$$

(4)

La contactul cu solul : $y = 0$. Din (4) deducem deviația ε spre est pe care punctul o va avea față de verticala punctului de lansare:

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2 H^3}{g}}$$

(5)

De remarcat că această expresie pentru deviația ε reprezintă o valoare aproximativă, dar ea a fost validată de multe măsurători experimentale.

13.5. Probleme propuse

13.5.1. Teste clasice

TC 13.1) Două suprafețe plane, între care se păstrează o distanță constantă $2r$, se rotesc în jurul unui ax vertical cu viteza unghiulară constantă ω . Între cele două suprafețe se mișcă cu frecare o bilă de masă m și rază r și care a fost lansată în momentul inițial cu viteza \vec{v}_0 perpendiculară pe axul de rotație (figura TC 13.1). Să se determine legile de mișcare $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ față de sistemul de axe ales și reacțiunea normală $N=N(t)$.

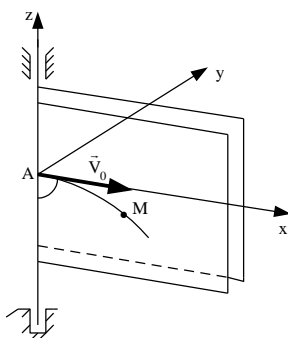


Figura TC 13.1

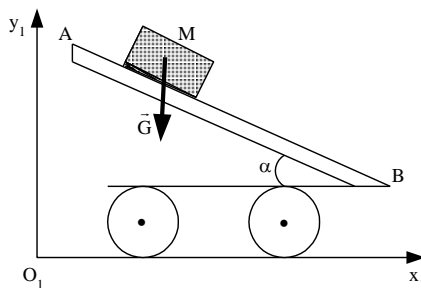


Figura TC 13.2.1

TC 13.2) Tija AB, înclinată față de orizontală cu unghiul α , se deplasează pe orizontală într-o mișcare de translație rectilie după legea $x_1(t) = \frac{1}{2} a t^2$. Pe tijă poate aluneca fără frecare un punct material M de masă m , care întâmpină rezistența mediului proporțională cu modulul vitezei $R = m c v_a$, unde v_a este modulul vitezei absolute (figura TC 13.2.1).

În momentul inițial mobilul M se află în punctul A și are viteza \vec{v}_0 orizontală (de la A la B). Cunoscând constantele α, a, m, c, v_0 , să se determine legea mișcării relative a mobilului față de tijă.

13.5.2. Teste grilă

TG 13.1) Ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material este:

a) $m \vec{a}_a = \vec{F}$; b) $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$; c) $m \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_C$; d) $0 = \vec{F} + \vec{F}_t$.

TG 13.2) În mișcarea relativă a unui punct material, compunerea accelerațiilor este definită de relația :

b) $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t$; b) $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$; c) $\vec{a}_a = \vec{a}_C + \vec{a}_t$; d) $\vec{a}_a = \vec{a}_r \times \vec{a}_t \times \vec{a}_C$.

13.6. Indicații și răspunsuri

TC 13.1) Mișcarea relativă a bilei M este o mișcare în planul Oxz, caracterizată prin viteza relativă $\vec{v}_r = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$ și accelerația relativă $\vec{a}_r = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$. Mișcarea de transport este o mișcare circulară uniformă cu viteza unghiulară ω , pe un cerc de rază egală cu x (distanța de la punctul M la raza Az). Ecuația diferențială a mișcării relative este::

$$m \vec{a}_r = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_t + \vec{F}_C$$

unde $\vec{G} = -mg \vec{k}$, $\vec{N} = N \vec{j}$, $\vec{F}_t = -m \vec{a}_t = m x \omega^2 \vec{i}$ și $\vec{F}_C = -m \vec{a}_C = -2m \omega \dot{x} \vec{j}$.

Rezolvând această ecuație în condițiile inițiale :

$$t=0 : x=z=0, \dot{x}=v_0, \dot{z}=0$$

se obține:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh}(\omega t) \quad , \quad y=0 \quad , \quad z = \frac{g t^2}{2} \quad , \quad N = 2m \omega v_0 \operatorname{ch}(\omega t)$$

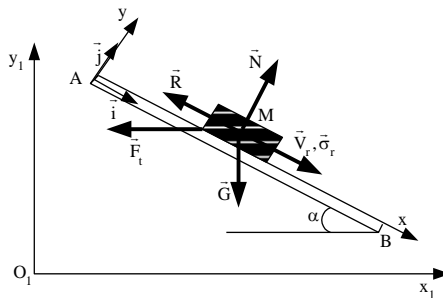


Figura TC 13.2.2

TC 13.2) Se consideră ca sistem de referință mobil (solidar cu tija AB) sistemul cartezian Axy (figura TC 13.2.2). Mișcarea relativă a punctului M este guvernată de ecuația:

$$m \vec{a}_r = \vec{G} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}_t + \vec{F}_C ,$$

unde $\vec{G} = m g \sin \alpha \vec{i} - m g \cos \alpha \vec{j}$, $\vec{N} = N \vec{j}$, $\vec{F}_C = \vec{0}$ (deoarece mișcarea de transport este mișcarea unui punct al unui corp aflat în translație),
 $\vec{R} = -m c \vec{v}_a = -m c \left(\vec{v}_r + \vec{v}_t \right) = -m c \left(a t \cos \alpha + \dot{x} \right) \vec{i} - m c a t \sin \alpha \vec{j}$.

Condițiile inițiale ale mișcării sunt: $t = 0$: $x = 0$, $\dot{x} = v_0$. Mișcarea punctului M față de tijă este dictată de legea:

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{c} - \frac{g}{c^2} \sin \alpha \right) (1 - e^{-ct}) + \frac{g}{c} t \sin \alpha - \frac{a t^2}{2} \cos \alpha.$$

TG 13.1) Rezultat teoretic. Răspuns corect: **c**).

TG 13.2) Rezultat teoretic. Răspuns corect: **b**).

14. Momente de inerție mecanice

14.1. Definiții

Momentele de inerție mecanice sunt mărimi scalare care caracterizează modul de răspândire a masei în interiorul unui sistem de puncte materiale sau unui solid rigid.

Prin definiție, *momentele de inerție ale unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan, o axă sau un punct (pol)* sunt sumele produselor dintre masele punctelor materiale ale sistemului și pătratele distanțelor de la aceste puncte la plan, axă sau pol, respectiv.

Prin definiție, *momentele centrifugale reprezintă suma produselor dintre masele punctelor materiale și coordonatele acestor puncte în raport cu două plane perpendiculare.*

Fie un sistem de n puncte materiale raportat la un reper cartezian $Oxyz$, plasate în punctele $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$, și având masele m_i , $i = \overline{1, n}$ (figura T 14.1). Se definesc următoarele momente de inerție:

a) *Momente de inerție planare*

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 \quad , \quad J_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 \quad , \quad J_{Ozx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \quad (14.1)$$

b) *Momente de inerție axiale*

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad , \quad J_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) \quad , \quad J_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (14.2)$$

c) *Moment de inerție polar*

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (14.3)$$

d) *Momente centrifugale*

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \quad , \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad , \quad J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i \quad (14.4)$$

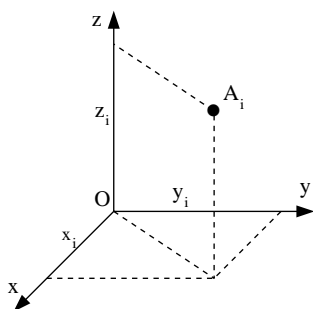


Figura T 14.1

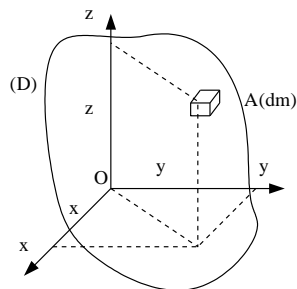


Figura T 14.2

Momentele de inerție planare, axiale și polare sunt mărimi pozitive în timp ce momentele centrifugale pot fi pozitive, nule sau negative. Unitatea de măsură pentru momentul de inerție este $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

În cazul unui solid rigid (figura T 14.2) sumele din expresiile (14.1 – 14.4) se înlocuiesc prin integrale. Astfel, avem:

e) *Momente de inerție planare*

$$J_{Oxy} = \int_D z^2 dm \quad , \quad J_{Oyz} = \int_D x^2 dm \quad , \quad J_{Ozx} = \int_D y^2 dm \quad (14.5)$$

f) *Momente de inerție axiale*

$$J_x = \int_D (y^2 + z^2) dm \quad , \quad J_y = \int_D (z^2 + x^2) dm \quad , \quad J_z = \int_D (x^2 + y^2) dm \quad (14.6)$$

g) *Moment de inerție polar*

$$J_O = \int_D (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (14.7)$$

h) *Momente centrifugale*

$$J_{xy} = \int_D xy \, dm \quad , \quad J_{yz} = \int_D yz \, dm \quad , \quad J_{zx} = \int_D zx \, dm \quad (14.8)$$

x, y, z reprezintă coordonatele unui element infinitesimal arbitrar de masă dm al domeniului (D) ocupat de rigid.

14.2. Relații între momentele de inerție

Între cele 10 momente de inerție definite mai sus există următoarele relații de dependență:

$$J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \quad (14.9)$$

$$J_{Oxy} = \frac{1}{2}(J_x + J_y - J_z) \quad , \quad J_{Oyz} = \frac{1}{2}(J_y + J_z - J_x) \quad , \quad J_{Ozx} = \frac{1}{2}(J_z + J_x - J_y) \quad (14.10)$$

astfel încât doar șase dintre ele sunt independente ($J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$).

Dacă sistemul de puncte materiale este un sistem plan, situat în planul Oxy , atunci putem observa că:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad , \quad J_z = J_x + J_y \quad (14.11)$$

astfel încât este necesar doar calculul momentelor J_x, J_y și J_{xy} .

14.3. Variația momentelor de inerție față de axe paralele.

Teorema lui STEINER.

Se consideră un sistem de n puncte materiale $A_i, i = \overline{1, n}$, de mase $m_i, i = \overline{1, n}$, având centrul de masă în C. Fie două drepte paralele (Δ) și (Δ_1) astfel încât $C \in \Delta$. Cunoscut fiind momentul de inerție axial J_Δ , ne propunem să calculăm, în funcție de acesta, momentul de inerție J_{Δ_1} .

Pentru aceasta considerăm următoarele sisteme de referință:

- sistemul $Cxyz$, pentru care $\Delta \equiv Cz$. Față de acest sistem punctul A_i are coordonatele $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1, n}$ (figura T 14.3);

- sistemul $O_1x_1y_1z_1$, pentru care $\Delta_1 \equiv O_1z_1$ și $O_1x_1 \parallel Cz, O_1y_1 \parallel Cy$. Față de acest sistem punctul A_i are coordonatele x_{1i}, y_{1i}, z_{1i} . Au loc relațiile evidente:

$$x_{1i} = x_i + x_C \quad , \quad y_{1i} = y_i + y_C \quad , \quad z_{1i} = z_i + z_C \quad (14.12)$$

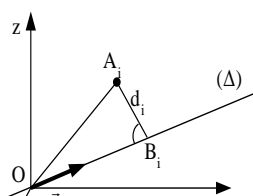
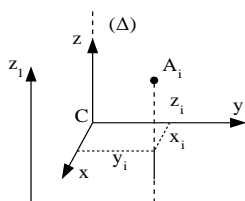


Figura T 14.3

Figura T 14.4

Prin definiție,

$$J_{\Delta} = J_z = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad , \quad J_{\Delta_1} = J_{z_1} = \sum_{i=1}^n m_i (y_{1i}^2 + z_{1i}^2) \quad (14.13)$$

Din (14.12) și (14.13) obținem:

$$\begin{aligned} J_{\Delta_1} &= \sum_{i=1}^n m_i [(x_i + x_C)^2 + (y_i + y_C)^2] = \\ &= (x_C^2 + y_C^2) \cdot \sum_{i=1}^n m_i + 2x_C \cdot \sum_{i=1}^n m_i x_i + 2y_C \cdot \sum_{i=1}^n m_i y_i + \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad (14.14)$$

Notând masa sistemului prin $M = \sum_{i=1}^n m_i$ și distanța dintre axele (Δ) și (Δ_1) prin $d = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$, observând că în conformitate cu teorema momentelor statice $\sum_{i=1}^n m_i x_i = M \cdot \xi_C = 0$, $\sum_{i=1}^n m_i y_i = M \cdot \eta_C = 0$ (deoarece $C(\xi_C, \eta_C, \zeta_C) \in Cz$, din (14.14) se deduce că:

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta} + M \cdot d^2 \quad (14.15)$$

Relația (14.15) reprezintă forma matematică a teoremei lui Steiner. Enunțul său este:

Teorema lui Steiner : *Momentul de inerție față de o axă (Δ_1) este egal cu suma dintre momentul de inerție față de o axă (Δ) , paralelă cu (Δ_1) , și care conține centrul maselor și produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe.*

Particularizând relația (14.15) găsim că:

$$J_{x_1} = J_x + M \cdot (y_C^2 + z_C^2) \quad , \quad J_{y_1} = J_y + M \cdot (z_C^2 + x_C^2) \quad , \quad J_{z_1} = J_z + M \cdot (x_C^2 + y_C^2) \quad (14.16)$$

Utilizând relațiile de definiție și (14.12) putem găsi și legătura dintre momentele centrifugale calculate față de cele doua sisteme de referință:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + M x_C y_C \quad , \quad J_{y_1 z_1} = J_{yz} + M y_C z_C \quad , \quad J_{z_1 x_1} = J_{zx} + M z_C x_C \quad (14.17)$$

14.4. Variația momentelor de inerție față de axe concurente

Se consideră un sistem de n puncte materiale $A_i, i = \overline{1, n}$, de mase $m_i, i = \overline{1, n}$, pentru care se cunosc momentele de inerție $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ în raport cu axele reperului cartezian $Oxyz$.

Ne punem problema determinării momentului de inerție în raport cu o axă (Δ) care trece prin punctul O și are direcția dată de cosinusurile directoare $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ (figura T 14.4).

Momentul de inerție al sistemului de puncte materiale în raport cu axa (Δ) este dat de relația:

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot A_i B_i^2 \quad (14.18)$$

$d_i = A_i B_i$ fiind distanța de la punctul A_i la dreapta (Δ) .

Din $\Delta O A_i B_i$ găsim că $A_i B_i^2 = O A_i^2 - O B_i^2$. Dar:

$$O A_i^2 = r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad O B_i^2 = \vec{O B_i}^2 = \left(\vec{r_i} \cdot \vec{u_{\Delta}} \right)^2 = (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2$$

astfel încât:

$$J_{\Delta} = \sum m_i \cdot \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 \right]$$

deoarece $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. După grupări convenabile, din relația precedentă se obține:

$$J_{\Delta} = \cos^2 \alpha \cdot \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \cdot \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) + \cos^2 \gamma \cdot \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - 2 \cos \beta \cos \gamma \cdot \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - 2 \cos \gamma \cos \alpha \cdot \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i,$$

adică:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2 J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2 J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \quad (14.19)$$

Caz particular: Dacă punctele sistemului și axa (Δ) aparțin planului Oxy , atunci deoarece $z = 0, \gamma = \frac{\pi}{2}, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, găsim că:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (14.20)$$

14.5. Axe și momente de inerție principale

Momentul de inerție J_{Δ} depinde de poziția axei față de triedrul $Oxyz$ prin intermediul unghiurilor α, β, γ pe care axa (Δ) le face cu Ox, Oy și Oz , respectiv. În funcție de măsurile acestor unghiuri J_{Δ} poate avea valori extreme. Axele (Δ) care trec prin O și față de care momentele de inerție au valori extreme se numesc *axe principale de inerție*. Momentele de inerție calculate în raport cu aceste axe se numesc *momente principale de inerție* (le vom nota prin J_1, J_2, J_3).

Aceste momente se pot obține prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Astfel, se consideră funcția:

$$J_{\Delta}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - \lambda(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1)$$

Valorile extreme se obțin ca soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial \cos \alpha} = 2(J_x - \lambda) \cos \alpha - 2J_{xy} \cos \beta - 2J_{zx} \cos \gamma = 0 \\ \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial \cos \beta} = -2J_{xy} \cos \alpha + 2(J_y - \lambda) \cos \beta - 2J_{yz} \cos \gamma = 0 \\ \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial \cos \gamma} = -2J_{zx} \cos \alpha - 2J_{yz} \cos \beta + 2(J_z - \lambda) \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (14.21)$$

Sistemul omogen (14.21), în necunoscutele $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, are soluții nenule doar dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14.22)$$

Se obține astfel o ecuație de gradul al treilea în necunoscuta λ , care are trei rădăcini reale deoarece determinantul este simetric față de diagonala principală (teorema

lui Kronecker). Rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt chiar valorile extreme ale momentului J_Δ , adică J_1, J_2, J_3 .

Axele principale de inerție $\Delta_i, i=1,3$, au drept parametrii directori ai direcției lor determinanții:

$$\begin{vmatrix} J_y - \lambda_i & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - \lambda_i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - \lambda_i & -J_{zx} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - \lambda_i \\ -J_{zx} & -J_{zy} \end{vmatrix}.$$

Caz particular: Dacă sistemul de puncte materiale se găsește în planul Oxy, atunci deoarece $J_z = J_O = J_x + J_y, J_{xz} = J_{yz} = 0$, ecuația (14. 22) are soluțiile:

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \quad J_3 = J_O$$

(14.23)

iar parametrii directori ai axelor principale de inerție sunt:

- pentru $\Delta_1: (J_y - J_1)(J_z - J_1); J_{xy}(J_z - J_1); 0;$
- pentru $\Delta_2: (J_y - J_2)(J_z - J_2); J_{xy}(J_z - J_2); 0;$
- $\Delta_3 \equiv Oz$.

Observație: Axele principale de inerție formează un triedru triortogonal iar momentele centrifugale în raport cu axele acestui triedru sunt nule.

Dacă centrul de masă al sistemului coincide cu originea triedrului ($O \equiv C$), atunci momentele de inerție corespunzătoare axelor ce trec prin C se numesc *momente centrale de inerție*. Momentele față de axele principale de inerție, în raport cu centrul de masă, se numesc *momente de inerție centrale și principale*.

14.6. Probleme rezolvate

R 14.1) Se consideră placa plană omogenă din figura R 14.1.1 pentru care se cunosc masa M și distanța a . Se cer:

- a) Momentele de inerție axiale J_x, J_y și momentul centrifugal J_{xy} ;
- b) Momentele și axele principale de inerție.

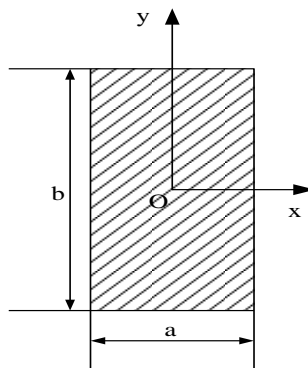
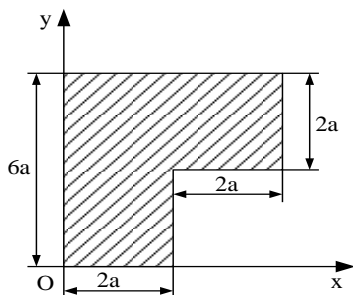


Figura R 14.1.1

Figura R 14.1.2

Rezolvare: Se presupun cunoscute momentele de inerție pentru o placă plană dreptunghiulară omogenă de masă m și laturi a și b (figura R 14.1.3) :

$$J_O = J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}, J_x = \frac{mb^2}{12}, J_y = \frac{ma^2}{12}, J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

Aria plăcii este $A = A_1 + A_2 = 6a \cdot 2a + 2a \cdot 2a = 16a^2$ iar densitatea

$\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{16a^2}$. Masele celor două plăci dreptunghiulare în care a fost împărțită placa

sunt $m_1 = \rho A_1 = \frac{3M}{4}$ și $m_2 = \rho A_2 = \frac{M}{4}$.

a) $J_x = J_{1x} + J_{2x}, \quad J_y = J_{1y} + J_{2y}, \quad J_{xy} = J_{1xy} + J_{2xy}$

(1)

unde:

$$J_{1x} = J_{1x_{1C}} + m_1 \cdot (3a)^2 = \frac{m_1(6a)^2}{12} + m_1(3a)^2 = 9Ma^2$$

$$J_{2x} = J_{2x_{2C}} + m_2 \cdot (5a)^2 = \frac{m_2(2a)^2}{12} + m_2(5a)^2 = \frac{19}{3}Ma^2$$

$$J_{1y} = J_{1y_{1C}} + m_1 \cdot (a)^2 = \frac{m_1(2a)^2}{12} + m_1(a)^2 = Ma^2$$

(2)

$$J_{2y} = J_{2y_{2C}} + m_2 \cdot (3a)^2 = \frac{m_2(2a)^2}{12} + m_2(3a)^2 = \frac{7}{3}Ma^2$$

$$J_{1xy} = J_{1x_{1C}y_{1C}} + m_1 \cdot a \cdot 3a = 0 + m_1 \cdot a \cdot 3a = \frac{9}{4}Ma^2$$

$$J_{2xy} = J_{2x_{2C}y_{2C}} + m_2 \cdot 3a \cdot 5a = 0 + m_2 \cdot 3a \cdot 5a = \frac{15}{4}Ma^2.$$

În deducerea relațiilor (2) s-au utilizat formulele lui Steiner. Din (1) și (2) găsim că:

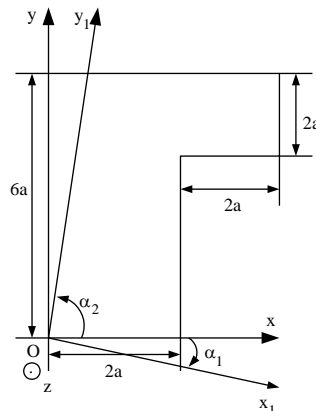
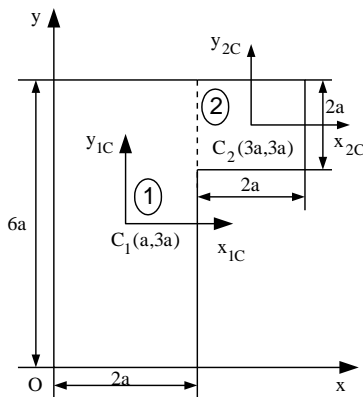


Figura R 14.1.3

Figura R 14.1.4

$$J_x = \frac{46}{3} M a^2, \quad J_y = \frac{10}{3} M a^2, \quad J_{xy} = 6 M a^2 \quad (3)$$

b) În cazul particular al unui sistem material plan ($z = 0$) momentele principale de inerție sunt date de relațiile:

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \quad J_3 = J_z = J_x + J_y = J_1 + J_2 \quad (4)$$

Se obțin valorile:

$$J_1 = 17,91 M a^2, \quad J_2 = 0,75 M a^2, \quad J_3 = 18,56 M a^2 \quad (5)$$

Axele principale de inerție (figura R 14.1.4) formează cu axa Ox unghiurile α_1, α_2 și α_3 date de relațiile:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_x - J_1}{J_{xy}} = -0,614, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_x - J_2}{J_{xy}} = 2,414$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} \text{ (a treia axă principală de inerție coincide cu } Oz \text{)}.$$

R 14.2) Pentru sistemul de corpuri din figura R 14.2.1, format din două discuri omogene de rază R și masă M și patru bare omogene de lungime l și masă m , să se determine momentele de inerție axiale J_x, J_y, J_z și momentul de inerție polar J_O .

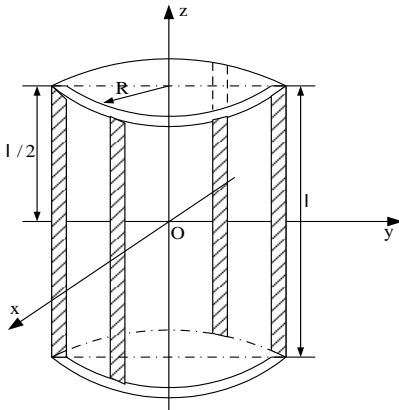


Figura R 14.2.1

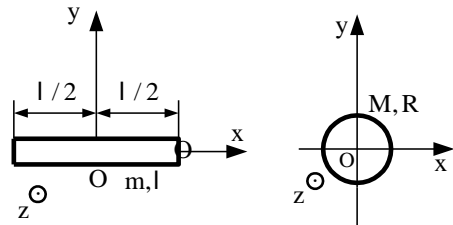


Figura R 14.2.2

Rezolvare: Se presupun cunoscute momentele de inerție pentru o bară omogenă de masă m și lungime l , respectiv pentru un disc omogen de masă M și rază R (figura R 14.2.2):

$$J_O = \frac{ml^2}{12}, J_x = 0, J_y = J_z = \frac{ml^2}{12}, J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0,$$

$$J_O = J_z = \frac{MR^2}{2}, J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}, J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0.$$

Pentru corpul din figura R 14.2.1 avem că $J_x = \sum_{i=1}^6 J_{ix}$, unde:

$$J_{1x} = J_{2x} = \frac{ml^2}{12}, J_{3x} = J_{4x} = \frac{ml^2}{12} + mR^2, J_{5x} = J_{6x} = \frac{MR^2}{4} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Rezultă:

$$J_x = \left(\frac{M}{2} + 2m\right)R^2 + \left(\frac{M}{2} + \frac{m}{3}\right)l^2$$

(1)

Datorită simetriei putem scrie că:

$$J_y = J_x$$

(2)

Totodată, $J_z = \sum_{i=1}^6 J_{iz}$, unde:

$$J_{1z} = J_{2z} = J_{3z} = J_{4z} = 0 + mR^2 = mR^2, J_{5z} = J_{6z} = \frac{MR^2}{2}.$$

Obținem astfel că:

$$J_z = (M + 4m)R^2$$

(3)

În fine, momentul de inerție polar are valoarea:

$$J_O = \frac{J_x + J_y + J_z}{2} = (M + 4m)R^2 + \left(\frac{M}{2} + \frac{m}{3}\right)l^2$$

(4)

R 14.3) Se dă o placă omogenă în formă de suprafață conică de masă M , rază a bazei R și înălțime h (figura R 14.3.1). Se cer:

- Momentele de inerție față de axele sistemului de coordonate cu originea în vârful conului și având drept axă Oz axa conului;
- Să se scrie matricea momentelor de inerție;
- Momentele de inerție față de axele sistemului de coordonate cu originea în centrul C al maselor și având drept axă Cz axa conului. Să se scrie matricea momentelor de inerție față de acest sistem.

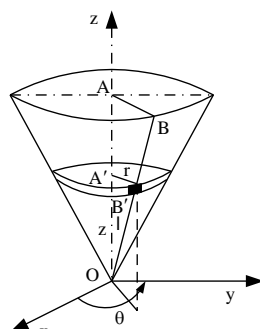
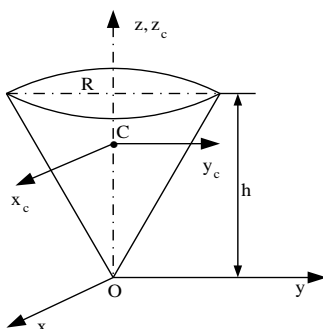


Figura R 14.3.1

Figura R 14.3.2

Rezolvare: a) Din motive de simetrie avem $J_x = J_y$, astfel că se vor determina doar momentele de inerție J_x și J_z date de relațiile:

$$J_x = \rho \int_D (y^2 + z^2) dA, \quad J_z = \rho \int_D (x^2 + y^2) dA \quad (1)$$

unde $\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi R G}$ reprezintă densitatea superficială.

Pentru calculul celor două integrale se împarte suprafața conică în elemente infinitezimale (figura R 14.3.2). Poziția unui astfel de element este dată prin coordonatele:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (2)$$

iar elementul de arie prin $dA = r dl d\theta$. Deoarece $\triangle OA'B' \approx \triangle OAB$ putem scrie că

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{z} = \frac{G}{l}, \text{ de unde rezultă:}$$

$$r = \frac{R}{h} z, \quad l = \frac{G}{h} z, \quad dl = \frac{G}{h} dz, \quad dA = \frac{R G}{h^2} z dz d\theta \quad (3)$$

Înlocuind aceste relații în formulele (1) se obține:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\rho R G}{h^2} \iint_D \left(\frac{R^2}{h^2} z^2 \sin^2 \theta + z^2 \right) z dz d\theta = \\ &= \frac{\rho R G}{h^2} \left[\frac{R^2}{2 h^2} \int_0^h z^3 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{R^2}{2 h^2} \int_0^h z^3 dz \cdot \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta + \int_0^h z^3 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \right] = \\ &= \frac{M}{4} (R^2 + 2 h^2). \end{aligned} \quad (4)$$

$$J_z = \frac{\rho R^3 G}{h^4} \iint_D z^3 dz d\theta = \frac{\rho R^3 G}{h^4} \int_0^h z^3 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M R^2}{2}.$$

b) Din motive de simetrie putem afirma că:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

(5)
astfel încât matricea momentelor de inerție este:

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{M(R^2 + 2h^2)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(R^2 + 2h^2)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

(6)

c) Se utilizează formula lui Steiner și se obține:

$$J_{x_C} = J_x - M \cdot OC^2 = \frac{M(R^2 + 2h^2)}{4} - M \cdot \frac{4h^2}{9} = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{2h^2}{9} \right)$$

(7)

$$J_{y_C} = J_y - M \cdot OC^2 = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{2h^2}{9} \right), J_{z_C} = J_z - M \cdot 0^2 = \frac{MR^2}{2}.$$

Din motive de simetrie :

$$J_{x_C y_C} = J_{y_C z_C} = J_{z_C x_C} = 0$$

(8)

Matricea momentelor de inerție rămâne diagonală:

$$[J_C] = \begin{pmatrix} \frac{M(R^2 + 2h^2/9)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(R^2 + 2h^2/9)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

(9)

14.7. Probleme propuse

14.7.1. Teste clasice

TC 14.1) Se consideră sistemul de puncte materiale din figura TC 14.1, plasat în punctele ale suprafeței paralelipipedului dreptunghic $[ABCD A'B'C'D']$ de laturi $AB = AD = 2a$ și $AA' = 4a$. Cunoscând masa m , să se determine:

- Momentele de inerție axiale J_x, J_y, J_z și centrifugale J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} ;
- Momentul de inerție polar J_O și momentele de inerție planare

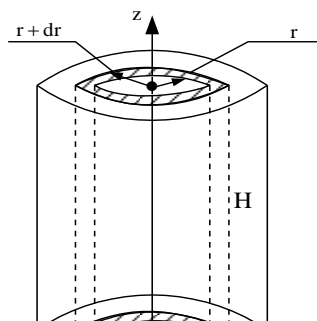
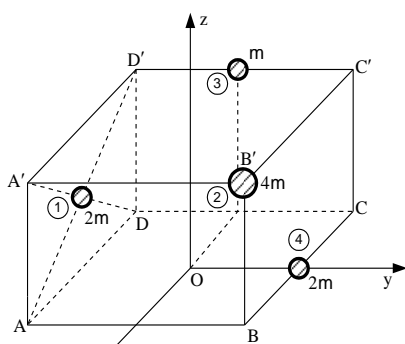


Figura TC 14.1

Figura TC 14.2

TC 14.2) Să se determine momentul de inerție pentru un cilindru circular drept omogen de masă M , rază a bazei R și înălțime H în raport cu axa sa de simetrie (figura TC 14.2).

TC 14.3) Să se calculeze momentele de inerție ale unei sfere omogene de rază R și masă M față de planele de simetrie și față de punctul O (figura TC 14.3).

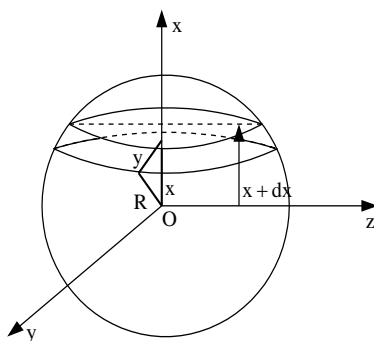


Figura TC 14.3

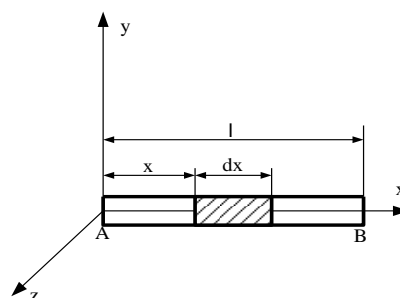


Figura TG 14.1

14.7.2. Teste grilă

TG 14.1) Să se determine momentul de inerție al unei bare drepte AB, de lungime L , la care densitatea variază liniar de la valoarea ρ_1 (în capătul A) la valoarea ρ_2 (în capătul B), față de centrul C al barei.

- a) $J_C = \frac{(3\rho_2 + \rho_1)L^3}{12}$; b) $J_C = \frac{(\rho_2 + 3\rho_1)L^3}{6}$; c) $J_C = \frac{(3\rho_2 - \rho_1)L^3}{24}$;
 d) $J_C = \frac{(\rho_2 - 3\rho_1)L^3}{12}$

TG 14.2) Care este valoarea momentului de inerție polar J_O al unei plăci plane omogene în formă de sector circular de rază R , unghi la centru 2α și densitate superficială ρ .

a) $J_O = \frac{\rho R^4 \alpha}{6}$; b) $J_O = \frac{\rho R^4 \alpha}{2}$; c) $J_O = 2 \rho R^2 \alpha$; d) $J_O = \frac{\pi \rho R^4 \alpha}{12}$.

14.8. Indicații și răspunsuri

TC 14.1) a) Se aplică formulele (14.2) și (14.4) din subcapitolul 14.1. Calculul se face cu ajutorul tabelului de mai jos, în care s-au trecut masele și coordonatele celor patru puncte materiale.

Nr. crt.	m_i	x_i	y_i	z_i
1	2 m	0	- a	2 a
2	4 m	a	a	4 a
3	m	- a	0	4 a
4	2 m	0	a	0

Se obțin valorile:

$$J_x = 13 m a^2, \quad J_y = 93 m a^2, \quad J_z = 96 m a^2$$

$$J_{xy} = 4 m a^2, \quad J_{yz} = 12 m a^2, \quad J_{zx} = 12 m a^2.$$

b) Pentru obținerea momentului de inerție polar J_O și a momentelor planare $J_{Oxy}, J_{Oyz}, J_{Ozx}$ se utilizează formulele (14.1) și (14.3). Rezultă:

$$J_O = 101 m a^2, \quad J_{Oxy} = 5 m a^2, \quad J_{Oyz} = 88 m a^2, \quad J_{Ozx} = 8 m a^2.$$

TC 14.2) Se împarte cilindrul în elemente infinitezimale de tipul celor din figura TC 14.2 și se obține:

$$J_{\Delta} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r l dr = \frac{\pi H \rho R^4}{2} = \frac{M R^2}{2},$$

deoarece $M = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 H$.

TC 14.3) Se consideră o împărțire a sferei în elemente infinitezimale ca în figura TC 14.3. Datorită simetriei putem scrie că $J_{Oxy} = J_{Oyz} = J_{Ozx}$. Dar:

$$J_{Oyz} = \int_D x^2 dm = \int_D x^2 \rho dV = \frac{M}{2V} \int_D x^2 dV, \text{ și}$$

$$dV = \pi y^2 dx, y^2 = R^2 - x^2, V = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

astfel că $J_{Oyz} = \frac{1}{5} M R^2$. Momentul de inerție polar al sferei este egal cu:

$$J_O = \int_D (x^2 + y^2 + z^2) dm = J_{Oxy} + J_{Oyz} + J_{Ozx} = \frac{3}{5} M R^2.$$

TG 14.1) Legea de variație a densității pe bară este $\rho(x) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} \cdot x + \rho_1$. Deoarece pe bară $y = z = 0$, din (14.7) deducem:

$$J_A = \int_{AB} x^2 dm = \int_{AB} x^2 \rho dx = \int_0^L \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{L} \cdot x + \rho_1 \right) \cdot x^2 dx = \frac{(3\rho_2 + \rho_1)L^3}{12}$$

Din formula lui Steiner obținem:

$$J_C = J_A - M \cdot AC^2 = \frac{(3\rho_2 - \rho_1)L^3}{24},$$

deoarece $AC = \frac{L}{2}$ iar $M = \int_{AB} dm = \int_0^L \rho(x) dx = \frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{2}$. Răspuns corect: c).

TG 14.2) Deoarece placa se află în planul Oxy ($z = 0$), din (14.7) găsim că:

$$J_O = \int_D (x^2 + y^2) dm = \rho \cdot \int_D (x^2 + y^2) dA.$$

Se poate folosi sistemul de coordonate polare (r, θ) pentru care:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dA = r dr d\theta$$

Se obține :

$$J_O = \rho \cdot \int_0^R r^3 dr \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = \frac{\rho R^4 \alpha}{2}.$$

Răspuns corect: b).

15. Teoremele generale în dinamica sistemelor de puncte materiale și a solidului rigid

15.1. Teorema impulsului

15.1.1. Impulsul unui sistem de puncte materiale și al unui solid rigid

Impulsul unui punct material de masă m , care are viteza \vec{v} , este un vector coliniar și de același sens cu viteza \vec{v} , definit prin relația:

$$\stackrel{\rightarrow}{H} \stackrel{\text{def}}{=} m \vec{v}$$

(15.1)

Pentru un sistem de puncte materiale de mase $m_i, i = \overline{1, n}$, și viteze $\vec{v}_i, i = \overline{1, n}$, impulsul sistemului este egal cu suma vectorială a impulsurilor punctelor materiale din care este alcătuit sistemul:

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

(15.2)

Impulsul unui solid rigid este definit prin relația:

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \vec{v} dm$$

(15.3)

unde integrala se consideră pe întreg domeniul (D) ocupat de rigid.

Observații: i) Unitatea de măsură pentru impuls în sistemul SI este $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

ii) Având în vedere relația de definiție a poziției centrului de masă, $\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$, și de

definiția (15.2), putem scrie că:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(M \vec{r}_C \right) = M \vec{v}_C.$$

Expresia

$$\vec{H} = M \vec{v}_C$$

(15.4)

unde $M = \sum_{i=1}^n m_i$ este masa iar \vec{v}_C viteza centrului de masă, arată că impulsul unui sistem de puncte materiale poate fi considerat ca impulsul centrului de masă în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului.

iii) Demonstrațiile din acest capitol se fac pentru cazul sistemului de puncte materiale dar ele rămân valabile și în cazul solidului rigid.

15.1.2. Teorema impulsului. Teorema mișcării centrului de masă.

Teorema impulsului (enunț): Derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale sau rigid este egală cu suma forțelor exterioare care acționează asupra sistemului sau rigidului:

$$\dot{\vec{H}} = \sum \vec{F}_{ext}$$

(15.5)

Demonstrație: Se consideră un sistem de n puncte materiale de mase $m_i, i = \overline{1, n}$, și accelerații $\vec{a}_i, i = \overline{1, n}$, aflate în interacțiune (figura T 15.1). Asupra punctului A_i acționează două categorii de forțe:

- forțe exterioare, înlocuite prin rezultanta lor \vec{F}_i ;

- forțe interioare, $\vec{F}_{ij}, i, j = \overline{1, n}, j \neq i$, adică forțele cu care celelalte puncte ale sistemului acționează asupra punctului A_i . Conform principiului acțiunii și reacțiunii forțele interioare sunt două câte două direct opuse, adică:

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \quad , \quad \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{0} \quad (15.6)$$

Izolând punctele sistemului și scriind pentru fiecare ecuația fundamentală a dinamicii se obțin ecuațiile:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{ij} + \dots + \vec{F}_{in}, i = \overline{1, n} \quad (15.7)$$

Însumând membru cu membru cele n relații (15.7) găsim că:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \quad (15.8)$$

În baza primei relații (15.6), ultima sumă din (15.8) este nulă. În plus:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{d \vec{H}}{dt} = \dot{\vec{H}} \quad (15.9)$$

Deci :

$$\dot{\vec{H}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{ext} \quad (15.10)$$

În proiecții pe axele reperului cartezian $Oxyz$, relația (15.10) se scrie:

$$\dot{H}_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad , \quad \dot{H}_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad , \quad \dot{H}_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (15.11)$$

Teorema mișcării centrului de masă (enunț): Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale sau rigid se mișcă la fel ca un punct în care este concentrată toată masa sistemului (rigidului) și asupra căruia acționează toate forțele exterioare:

$$M \vec{a}_C = \sum \vec{F}_{ext} \quad (15.12)$$

Demonstrație: Derivând relația $\vec{H} = M \vec{v}_C$ în raport cu timpul t găsim că $\dot{\vec{H}} = M \dot{\vec{v}}_C = M \vec{a}_C$. Din (15.10) găsim apoi că $M \vec{a}_C = \sum \vec{F}_{ext}$.

Observație: Teorema impulsului și teorema mișcării centrului de masă nu sunt teoreme independente. Teorema mișcării centrului de masă reprezintă o altă formă de prezentare a teoremei impulsului.

15.1.3. Teorema conservării impulsului

Teorema conservării impulsului (enunț) : Dacă în timpul mișcării sistemul de puncte materiale (rigidul) este izolat sau dacă suma forțelor exterioare este nulă, atunci impulsul sistemului (rigidului) se conservă.

Demonstrație: Deoarece $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, din (15.5) găsim că $\dot{\vec{H}} = \vec{0}$, adică $\vec{H} = M \vec{v}_C = \text{constant}$.

Observație: În multe cazuri practice rezultanta forțelor exterioare are nulă doar componenta după o singură axă, ceea ce va conduce la conservarea impulsului doar după acea axă. Dacă această axă este Ox , atunci:

$$\sum F_{x, ext} = 0 \Rightarrow H_x = M \cdot v_{Cx} = \text{constant} \quad (15.14)$$

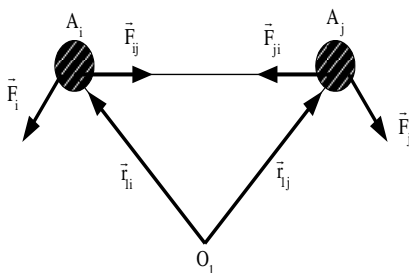


Figura T 15.1

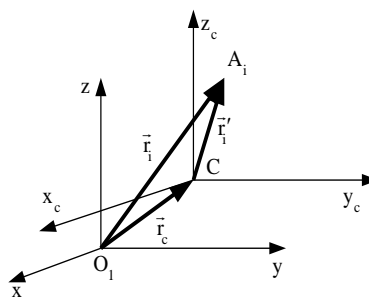


Figura T 15.2

15.2. Teorema momentului cinetic

15.2.1. Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale și al unui solid rigid. Teorema lui Koenig pentru moment cinetic.

Momentul cinetic al unui punct material de masă m , care se mișcă cu viteza \vec{v} , calculat în raport cu un punct fix O , este momentul vectorului impuls $\vec{H} = m \vec{v}$ al punctului calculat în raport cu punctul O :

$$\vec{K}_O \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad (15.15)$$

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale de mase $m_i, i = \overline{1, n}$, și viteze $\vec{v}_i, i = \overline{1, n}$, în raport cu un punct fix O , se obține cu relația:

$$\vec{K}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \vec{K}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (15.16)$$

Momentul cinetic al unui solid rigid se definește prin relația:

$$\vec{K}_O \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \vec{r} \times \vec{v} \, dm \quad (15.17)$$

unde integrala se extinde pe întreg domeniul (D) ocupat de rigid.

Teorema lui Koenig pentru moment cinetic (enunț): Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale sau al unui rigid în raport cu un punct fix O_1 este egal cu suma dintre momentul cinetic în raport cu O_1 al centrului de masă în care se presupune concentrată toată masa sistemului (rigidului) și momentul cinetic al sistemului (rigidului) în mișcarea sa relativă în raport cu centrul de masă:

$$\vec{K}_{O_1} = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \vec{K}_C \quad (15.18)$$

Demonstrație: Se consideră sistemul de puncte materiale $A_i, i = \overline{1, n}$, de mase $m_i, i = \overline{1, n}$. El este raportat la sistemul cartezian O_1xyz și la un sistem cartezian $Cx_Cy_Cz_C$ cu originea în centrul de masă și axele paralele cu ale sistemului O_1xyz (figura T 15.2). Între vectorii de poziție ai punctului A_i față de cele două repere există relația:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i' \quad (15.19)$$

Prin derivare în raport cu timpul, din (15.19) se obține:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i' \quad (15.20)$$

Din (15.16), (15.19) și (15.20) găsim că:

$$\vec{K}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_C + \vec{r}_i' \right) \times m_i \left(\vec{v}_C + \vec{v}_i' \right) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_i' +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Însă:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_C &= \vec{r}_C \times \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{v}_C = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C \\ \sum_{i=1}^n \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_i &= \vec{r}_C \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

(15.21)

$$\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_C = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_C = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{K}_C$$

S-a ținut cont de faptul că $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{S}_C = M \cdot \vec{\xi}_C$ este momentul static polar

față de centrul de masă. El este nul deoarece $\vec{\xi}_C = \vec{0}$ (vectorul de poziție al punctului C față de reperul $Cx_C y_C z_C$).

Din (15.20) și (15.21) găsim acum (15.18).

15.2.2. Expresii ale momentului cinetic în diferite mișcări particulare ale rigidului

15.2.2.1. Mișcarea de translație

În mișcarea de translație vitezele tuturor punctelor rigidului la un moment dat sunt egale între ele și egale cu viteza centrului de masă. Neexistând mișcare relativă față de centrul de masă, avem:

$$\vec{K}_C = \vec{0}, \quad \vec{K}_{O_1} = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C$$

(15.22)

Momentul cinetic al rigidului în raport cu punctul O_1 , în mișcarea de translație, se obține ca și cum întreaga masă a rigidului ar fi concentrată în centrul de masă și s-ar deplasa cu viteza acestuia.

15.2.2.2. Mișcarea de rotație

În mișcarea de rotație viteza unui punct A_i se obține cu relația $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Vom considera cazul general în care axa de rotație are o direcție oarecare față de un triedru mobil solidar cu rigidul. Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ și vectorul de poziție \vec{r}_i sunt dați prin:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad \vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

Avem succesiv:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \vec{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \vec{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \vec{k}$$

$$\vec{K}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_i x_i & m_i y_i & m_i z_i \\ \omega_y z_i - \omega_z y_i & \omega_z x_i - \omega_x z_i & \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{vmatrix}$$

Proiecția K_x a momentului cinetic \vec{K}_{O_1} pe O_1x va fi:

$$K_x = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} m_i y_i & m_i z_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i & \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{vmatrix} = \sum [m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_x - m_i x_i y_i \omega_y - m_i x_i z_i \omega_z] =$$

$$= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z.$$

Procedând similar pe direcțiile O_1y și O_1z obținem următoarele proiecții ale momentului cinetic în mișcarea de rotație:

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \quad K_y = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z$$

$$K_z = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z$$

(15.23)

Cazuri particulare:

1) Dacă axa O_1z coincide cu axa de rotație, atunci $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega$. Proiecțiile momentului cinetic devin:

$$K_x = -J_{xz} \omega, \quad K_y = -J_{yz} \omega, \quad K_z = J_z \omega$$

(15.24)

2) Dacă axa O_1z coincide cu axa de rotație iar rigidul este corp de revoluție ($J_{xz} = J_{yz} = 0$), atunci momentul cinetic are direcția axei de rotație:

$$\vec{K}_{O_1} = K_z \vec{k} = J_z \omega \vec{k} = J_z \vec{\omega}$$

(15.25)

15.2.2.3. Mișcarea rigidului cu punct fix

În mișcarea rigidului cu punct fix (mișcarea sferică) viteza unui punct arbitrar A_i are aceeași formă cu cea din mișcarea de rotație astfel încât expresiile (15.23) ale proiecțiilor momentului cinetic rămân valabile. Vectorul $\vec{\omega}$ nu mai păstrează însă suportul fix.

Dacă axele reperului mobil $Oxyz$ se aleg astfel încât să coincidă cu axele principale de inerție în raport cu punctul fix O_1 , atunci:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0, \quad J_x = J_1, \quad J_y = J_2, \quad J_z = J_3$$

iar

$$\vec{K}_O = J_1 \omega_x \vec{i} + J_2 \omega_y \vec{j} + J_3 \omega_z \vec{k} \quad (15.26)$$

J_1, J_2 și J_3 sunt momentele de inerție principale în raport cu O_1 .

15.2.2.4. Mișcarea elicoidală și mișcarea plan-paralelă

Deoarece în aceste mișcări particulare distribuția de viteze se obține prin însumarea vectorială a două distribuții de viteze, una corespunzătoare unei mișcări de translație și cealaltă unei mișcări de rotație, momentul cinetic în raport cu originea reperului fix se obține analog:

$$\vec{K}_{O_1} = \vec{K}_{O_1, \text{translație}} + \vec{K}_{O_1, \text{rotație}} \quad (15.27)$$

15.2.3. Teorema momentului cinetic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui rigid în raport cu un reper fix

Teorema momentului cinetic (enunț) : Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale (rigid) calculat în raport cu un punct fix O_1 este egală cu suma momentelor forțelor exterioare care acționează asupra sistemului (rigidului), momente calculate în raport cu același punct fix:

$$\dot{\vec{K}}_{O_1} = \sum \vec{M}_{O_1, \text{ext}} \quad (15.28)$$

Demonstrație: Se consideră sistemul de puncte materiale $A_i, i = \overline{1, n}$, studiat în paragraful 15.1.2. Se înmulțesc vectorial la stânga relațiile (15.7) cu $\vec{r}_{1i}, i = \overline{1, n}$, și se adună relațiile astfel obținute:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_{ij} \quad (15.29)$$

În baza celei de-a doua relații (15.6) suma dublă din (15.29) este nulă. Prima sumă din membrul drept reprezintă chiar momentul rezultat al forțelor exterioare calculat în raport cu O_1 . În plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times m_i \vec{a}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{r}_{1i} \times m_i \vec{v}_i \right) - \frac{d\vec{r}_{1i}}{dt} \times m_i \vec{v}_i \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_{1i} \times m_i \vec{v}_i \right) - \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{K}_{O_1}}{dt}. \end{aligned}$$

suma a doua fiind nulă $\left(\vec{v}_i // m_i \vec{v}_i \right)$.

În proiecții pe axele reperului cartezian fix O_1xyz relația (15.28) se scrie:

$$\dot{\vec{K}}_x = \sum M_{O_1x, ext} \quad , \quad \dot{\vec{K}}_y = \sum M_{O_1y, ext} \quad , \quad \dot{\vec{K}}_z = \sum M_{O_1z, ext} \quad (15.30)$$

15.2.4. Teorema momentului cinetic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui rigid în jurul centrului de masă

Enunț: Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale (rigid), corespunzător mișcării acestuia în jurul centrului de masă, este egală cu momentul rezultat în raport cu centrul de masă al forțelor exterioare care acționează asupra sistemului:

$$\dot{\vec{K}}_C = \sum \vec{M}_{C, ext} \quad (15.31)$$

Demonstrație: Se utilizează relațiile (15.18), (15.19) și (15.28).

$$\begin{aligned} \dot{\vec{K}}_{O_1} &= \sum \vec{M}_{O_1, ext} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \vec{K}_C \right) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_C + \vec{r}_i \right) \times \vec{F}_i \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{d \vec{r}_C}{dt} \times M \vec{v}_C + \vec{r}_C \times M \frac{d \vec{v}_C}{dt}}_{=0} + \dot{\vec{K}}_C = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{r}_C \times M \vec{a}_C + \dot{\vec{K}}_C = \vec{r}_C \times M \vec{a}_C + \sum \vec{M}_{C, ext} \Rightarrow \dot{\vec{K}}_C = \sum \vec{M}_{C, ext} . \end{aligned}$$

S-a folosit faptul că $M \vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ (teorema mișcării centrului de masă).

15.2.5. Teorema conservării momentului cinetic

Teorema conservării momentului cinetic (enunț): Dacă în timpul mișcării sistemul de puncte materiale (rigid) este izolat sau dacă momentul rezultat al forțelor exterioare în raport cu O_1 este nul, atunci momentul cinetic al sistemului (rigidului) în raport cu punctul O_1 se conservă.

Demonstrație: Deoarece $\sum \vec{M}_{O_1, ext} = \vec{0}$, din (15.28) se obține că $\dot{\vec{K}}_{O_1} = \vec{0}$,
adică $\vec{K}_{O_1} = \text{constant}$.

Observație: Dacă numai una din proiecțiile momentului resultant al forțelor exterioare este nulă, atunci momentul cinetic se conservă numai în raport cu axa respectivă. Astfel:

$$M_{O_1 x, ext} = 0 \Rightarrow K_{O_1 x} = \text{constant}.$$

15.3. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic

15.3.1. Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale și a unui solid rigid. Teorema lui Koenig pentru energie cinetică.

Prin definiție, *energia cinetică a unui punct material* de masă m și viteză \vec{v} este dată prin relația:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

(14.32)

Pentru un sistem de puncte materiale de mase $m_i, i = \overline{1, n}$, și viteze $\vec{v}_i, i = \overline{1, n}$, energia cinetică se definește prin relația:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

(14.33)

Energia cinetică a unui solid rigid se definește prin relația:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \frac{1}{2} v^2 dm$$

(14.34)

unde integrala se consideră pe întreg domeniul ocupat de acesta.

Teorema lui Koenig pentru energie cinetică (enunț): Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale (rigid) aflat în mișcare este egală cu suma dintre energia cinetică a centrului de masă în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului (rigidului) și energia cinetică în mișcarea relativă a sistemului (rigidului) în jurul centrului de masă.

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + E'$$

(14.35)

Demonstrație: Se consideră sistemul de puncte materiale studiat în paragraful 15.2.1. (vezi și figura T 15.1). Folosind definiția (15.33) și relația (15.20) găsim că:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_C + \vec{v}_i' \right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_C^2 + 2 \vec{v}_C \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i'^2 \right) = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{i=1}^n m_i + \vec{v}_C \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2.$$

Observând că $\sum_{i=1}^n m_i = M$ (masa sistemului), $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' = \vec{0}$ și că

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = E'$ (energia cinetică în mișcarea relativă a sistemului în jurul centrului de masă), se obține relația (15.35).

15.3.2. Lucrul mecanic elementar și lucrul mecanic finit al unei forțe

Prin definiție, *lucrul mecanic elementar efectuat de forța \vec{F}* este egal cu:

$$dL \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \left(\hat{\vec{F}}, \hat{d\vec{r}} \right)$$

(15.36)

unde $d\vec{r}$ reprezintă deplasarea elementară a punctului de aplicație al forței.

Folosind exprimarea analitică a vectorilor \vec{F} și $d\vec{r}$, în funcție de proiecțiile lor pe axele unui reper cartezian $Oxyz$, putem scrie că:

$$dL = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

(15.37)

Lucrul mecanic finit corespunzător unei forțe variabile \vec{F} și unei deplasări finite între două poziții A și B se definește prin relația:

$$L_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

(15.38)

Lucrul mecanic corespunzător unui cuplu de forțe, de moment \vec{M} , și unei deplasări unghiulare $\Theta \in [\Theta_1, \Theta_2]$ se definește prin relația:

$$L_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \vec{M} \cdot d\vec{\Theta} = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} |\vec{M}| \cdot |d\vec{\Theta}| \cdot \cos \left(\hat{\vec{M}}, \hat{d\vec{\Theta}} \right)$$

(15.39)

15.3.3. Forme ale energiei cinetice în diferite mișcări particulare ale rigidului

15.3.3.1. Mișcarea de translație

Deoarece toate punctele au aceeași viteză la un moment de timp dat rezultă că:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_C^2 = \frac{1}{2} v_C^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} M v_C^2 \quad (15.40)$$

unde $M = \sum_{i=1}^n m_i$ este masa rigidului iar \vec{v}_C viteza centrului de masă.

15.3.3.2. Mișcarea de rotație

Într-o mișcare de rotație toate punctele se mișcă cu aceeași viteză unghiulară $\vec{\omega}$ iar modulul vitezei punctului A_i este $v_i = l_i \omega$, unde l_i este distanța de la punct la axa de rotație. Din (15.33) găsim că:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i l_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i l_i^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \quad (15.41)$$

unde J_{Δ} este momentul de inerție în raport cu axa de rotație Δ .

15.3.3.3. Mișcarea rigidului cu punct fix

Componentele vitezei punctului $A_i(x_i, y_i, z_i)$ sunt:

$$v_{ix} = z_i \omega_y - y_i \omega_z, \quad v_{iy} = x_i \omega_z - z_i \omega_x, \quad v_{iz} = y_i \omega_x - x_i \omega_y.$$

Observând că $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$, din (15.33) se obține că:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[(z_i \omega_y - y_i \omega_z)^2 + (x_i \omega_z - z_i \omega_x)^2 + (y_i \omega_x - x_i \omega_y)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \omega_x^2 \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) + \frac{1}{2} \omega_y^2 \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) + \frac{1}{2} \omega_z^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ &\quad - \omega_y \omega_z \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - \omega_z \omega_x \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i - \omega_x \omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i. \end{aligned}$$

Deci:

$$E = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 - J_{yz} \omega_y \omega_z - J_{zx} \omega_z \omega_x - J_{xy} \omega_x \omega_y \quad (15.42)$$

Dacă axele reperului mobil $Oxyz$ (O punct fix) sunt axe principale de inerție ($J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$, $J_x = J_1, J_y = J_2, J_z = J_3$), atunci:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_z^2 \quad (15.43)$$

15.3.3.4. Mișcarea elicoidală

Componentele vectorului viteză al punctului $A_i(x_i, y_i, z_i)$ pe axele reperului mobil Oxyz sunt:

$$v_{ix} = -\omega y_i, \quad v_{iy} = \omega x_i, \quad v_{iz} = v_O$$

astfel încât:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i [\omega^2 (x_i^2 + y_i^2) + v_O^2] = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1}{2} v_O^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 + \frac{1}{2} M v_O^2 \end{aligned} \quad (15.44)$$

unde J_Δ este momentul de inerție al rigidului în raport cu axa mișcării elicoidale și M este masa rigidului.

15.3.3.5. Mișcarea plan – paralelă

Componentele carteziene ale vectorului viteză al punctului $A_i(x_i, y_i, z_i)$ pe axele unui triedru mobil, solidar cu rigidul, și având planul Oxy paralel cu planul fix la care se raportează mișcarea iar originea O chiar în centrul maselor C, sunt:

$$v_{ix} = v_{Ox} - \omega y_i, \quad v_{iy} = v_{Oy} + \omega x_i, \quad v_{iz} = 0$$

astfel încât:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i [(v_{Cx} - \omega y_i)^2 + (v_{Cy} + \omega x_i)^2] = \\ &= \frac{1}{2} (v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) \sum_{i=1}^n m_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ &- \omega v_{Cx} \sum_{i=1}^n m_i y_i - \omega v_{Cy} \sum_{i=1}^n m_i x_i \Rightarrow E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta C} \omega^2, \end{aligned}$$

unde $J_{\Delta C}$ este momentul de inerție al rigidului în raport cu o axă ce trece prin centrul de masă și este perpendiculară pe planul fix iar M este masa rigidului. S-a ținut cont de faptul că $\sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0$, aceste sume reprezentând momentele statice al rigidului în raport cu planele Cxz și Cyz (a se vedea teorema momentelor statice).

15.3.4. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau rigid față de un punct fix

Enunț (cazul sistemului de puncte materiale) : Variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale într-un interval de timp infinitesimal este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și lucrul mecanic elementar al forțelor interioare, efectuate în același interval de timp:

$$dE = dL_{ext} + dL_{int} \quad (15.46)$$

Demonstrație: Se consideră sistemul de puncte materiale studiat în paragraful 14.1.2. Înmulțind scalar relațiile (15.7) cu diferențialele vectorilor de poziție $d\vec{r}_{1i}, i = \overline{1, n}$, și adunând relațiile astfel obținute se găsește că:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_{1i} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{1i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{1i} \quad (15.47)$$

Cei doi termeni din membrul drept al relației (15.47) reprezintă lucrul mecanic al forțelor exterioare, respectiv lucrul mecanic al forțelor interioare ce acționează asupra sistemului:

$$dL_{ext} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_{1i} \quad , \quad dL_{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{1i} \quad (15.48)$$

În plus:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_{1i} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_{1i} = \sum_{i=1}^n m_i d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_{1i}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dE \end{aligned}$$

Din (15.46 – 15.48) se obține (15.46).

Prin integrarea relației (15.46) între două momente de timp t_0 și t_1 se obține teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic sub formă finită:

$$E_1 - E_0 = L_{0-1}^{ext} + L_{0-1}^{int} \quad (15.50)$$

În general lucrul mecanic elementar al forțelor interioare nu este nul, deși forțele interioare sunt două câte două direct opuse. Considerând perechea de forțe interioare \vec{F}_{ij} și \vec{F}_{ji} , $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$, lucrul mecanic corespunzător este:

$$dL_{\text{int}} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{1i} + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_{1j} = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_{1i} - d\vec{r}_{1j}) = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) dt = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} dt$$

deoarece $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ și $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_{1i}}{dt}$. S-a notat cu \vec{v}_{ij} viteza relativă a punctului A_i față de punctul A_j .

Pentru ca $dL_{\text{int}} = 0$ este necesar ca $\vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = 0$. Acest lucru se întâmplă dacă:

- 1) $\vec{F}_{ij} = \vec{0}$ - nu există interacțiune între A_i și A_j ;
- 2) $\vec{v}_{ij} = \vec{0}$ - punctul A_i are aceeași viteză cu punctul A_j (cazul a două corpuri care se rostogolesc unul peste celălalt fără ca să alunece);
- 3) $\vec{F}_{ij} \perp \vec{v}_{ij}$ - forța interioară între punctele A_i și A_j este perpendiculară pe viteza lor relativă (cazul în care distanța $A_i A_j$ rămâne constantă în timpul mișcării, iar punctul A_j descrie o mișcare pe o sferă cu centrul în A_i . Viteza \vec{v}_{ij} va fi perpendiculară pe raza sferei, adică pe dreapta $A_i A_j$ care este suportul forței \vec{F}_{ij}).

În particular, dacă sistemul este un solid rigid (distanța dintre oricare două puncte nu se modifică în timpul mișcării) lucrul mecanic al forțelor interioare este nul.

Se obține astfel următorul enunț al teoremei energiei cinetice și a lucrului mecanic:

Enunț (cazul rigidului): Variația energiei cinetice a unui solid rigid într-un interval de timp infinitesimal este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care acționează asupra rigidului în același interval de timp:

$$dE = dL_{\text{ext}} \quad (15.51)$$

Sub formă finită relația (15.51) se scrie ca:

$$E_1 - E_0 = L_{\text{ext}}^{0-1} \quad (15.52)$$

15.3.5. Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic în mișcarea unui sistem de puncte materiale sau rigid față de centrul de masă

Enunț (cazul sistemului de puncte materiale) : Variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale în mișcarea acestuia în jurul centrului său de masă este egală

cu lucrul mecanic al forțelor exterioare și lucrul mecanic al forțelor interioare aplicate sistemului, calculate cu deplasările relative față de centrul de masă:

$$dE' = dL'_{ext} + dL'_{int}$$

(15.53)

Demonstrație: Se utilizează teorema lui Koenig pentru energie cinetică și relația (15.20) (vezi și paragraful 15.3.1). Din (15.35) și (15.46) găsim:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}M\vec{v}_C^2 + E'\right) &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\left(\vec{r}_C + \vec{r}_i'\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\left(\vec{r}_C + \vec{r}_i'\right) \Leftrightarrow \\ M\vec{v}_C \cdot d\vec{v}_C + dE' &= \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r}_C + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i' + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}\right) \cdot d\vec{r}_C + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i' \end{aligned}$$

(15.54)

$$\text{Dar } \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = 0, \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i' \stackrel{\text{not}}{=} dL'_{ext}, \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i' \stackrel{\text{not}}{=} dL'_{int} \text{ iar}$$

$$M\vec{v}_C \cdot d\vec{v}_C = M\vec{v}_C \cdot dt \cdot \frac{d\vec{v}_C}{dt} = M d\vec{r}_C \cdot \vec{a}_C = M \vec{a}_C \cdot d\vec{r}_C = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r}_C$$

astfel încât din (15.54) se obține (15.53).

Observație: În cazul rigidului, $dL'_{int} = 0$, astfel încât relația (15.53) se reduce la

$$dE' = dL'_{ext}$$

(15.55)

ceea ce înseamnă că teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic în mișcarea rigidului față de centrul său de masă va avea aceeași formă ca la mișcarea sa față de un punct fix (același lucru este valabil și pentru un sistem de puncte materiale).

15.3.6. Conservarea energiei mecanice

Fiind dată o forță $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, ea se numește *forță conservativă* dacă există o funcție scalară $U: R^3 \rightarrow R, U = U(x, y, z)$ astfel încât:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

(15.56)

Funcția U se numește *funcție de forță*. Forța \vec{F} și lucrul său mecanic elementar capătă forma:

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } U \quad (15.57)$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = dU \quad (15.58)$$

Să considerăm un sistem de puncte materiale la care fiecare forță interioară derivă dintr-o funcție de forță.

Astfel, pentru perechea de forțe interioare \vec{F}_{ij} , \vec{F}_{ji} , $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$, există funcția $U_{ij}(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}, x_{1j}, y_{1j}, z_{1j})$ astfel încât:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{1i}} \vec{i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{1i}} \vec{j} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{1i}} \vec{k}, \quad \vec{F}_{ji} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_{1j}} \vec{i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_{1j}} \vec{j} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_{1j}} \vec{k}$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor interioare este:

$$dL_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{1i} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n dU_{ij} = d \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_{ij} \right) = dU \quad (15.59)$$

unde $U = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_{ij}$ este funcția de forță a sistemului și depinde de pozițiile punctelor

care formează sistemul.

Definim *energia potențială a sistemului* prin relația:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} -U \quad (15.60)$$

astfel încât:

$$dL_{\text{int}} = -dV \quad (15.61)$$

Relația (15.46) (forma matematică a teoremei energiei cinetice și a lucrului mecanic) devine:

$$dE = dL_{\text{ext}} - dV \quad \text{sau} \quad d(E + V) = dL_{\text{ext}} \quad (15.62)$$

Suma

$$E + V \stackrel{\text{def}}{=} E_{\text{mec}} \quad (15.63)$$

poartă numele de *energie mecanică a sistemului*.

Dacă $dL_{\text{ext}} = 0$, se obține:

$$E_{mec} = E + V = \text{constant}$$

(15.64)

Relația (15.64) reprezintă teorema conservării energiei mecanice. Enunțul său este:

Dacă lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care acționează asupra unui sistem conservativ este nul într-un interval de timp, atunci energia mecanică a sistemului este constantă în acel interval.

15.4. Probleme rezolvate

R 15.1) Un cilindru, având dimensiunile din figura R 15.1.1 și greutatea $G = 5000 \text{ N}$, este așezat pe un plan orizontal. Să se determine lucrul mecanic necesar răsturnării cilindrului în jurul punctului A de intersecție a unei generatoare cu planul orizontal.

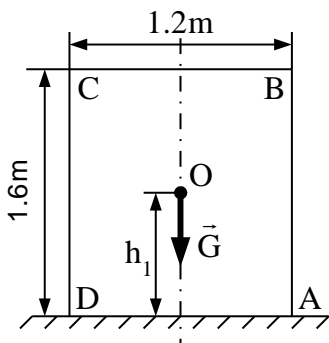


Figura R 15.1.1

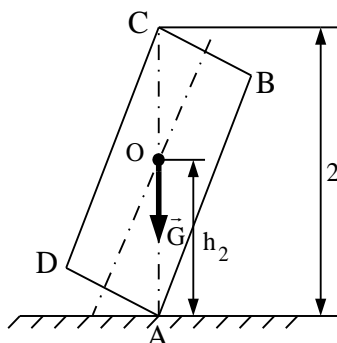


Figura R 15.1.2

Rezolvare: Pentru a răsturna cilindrul este necesar ca acesta să fie adus cu diagonală AC în poziție verticală (figura R 15.1.2). Centrul de greutate se ridică de la înălțimea $h_1 = 0,8 \text{ m}$ la înălțimea $h_2 = \sqrt{h_1^2 + R^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = 1 \text{ m}$. Lucrul mecanic necesar răsturnării va fi: $L = G(h_2 - h_1) = 5000(0,8 - 1) = -1000 \text{ J}$.

R 15.2) Un con circular drept de greutate G , având înălțimea h și raza $r = h / 3$, se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal în jurul vârfului său fix (figura R 15.2.1). Să se determine energia cinetică a conului dacă acesta se rotește în jurul axei verticale ce trece prin O cu viteza unghiulară constantă $\omega = 4 \pi \text{ rad / s}$.

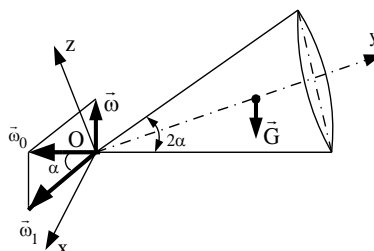
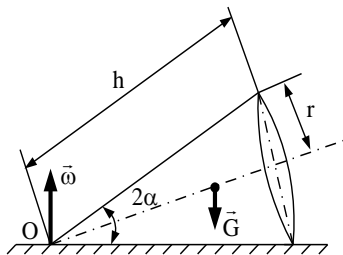


Figura R 15.2.1

Figura R 15.2.2

Rezolvare: Mișcarea solidului cu punct fix se studiază în raport cu sistemul cartezian Oxyz având originea O în vârful conului și axa Oy în lungul axei de simetrie a conului (figura R 15.2.2). Energia cinetică este dată de relația:

$$E = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_z \omega_x)$$

(1)

unde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt proiecțiile vectorului viteză unghiulară pe axele sistemului Oxyz.

Viteza unghiulară absolută rezultă în urma unei compuneri de rotații concurente,

$\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1$. Din triunghiul vitezelor unghiulare se obține $\omega_a = \frac{\omega}{\tan \alpha}$, astfel încât

proiecțiile vitezei unghiulare absolute pe axele reperului cartezian Oxyz vor fi:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega_a \cos \alpha, \quad \omega_z = \omega_a \sin \alpha$$

(2)

Se poate arăta (vezi problemele R 14.1 – R 14.3) că momentele de inerție axiale și centrifugale pentru conul circular drept raportat la sistemul cartezian Oxyz sunt:

$$J_x = J_z = \frac{3}{5} \frac{G}{g} \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right), \quad J_y = \frac{3}{10} \frac{G}{g} r^2, \quad J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

(3)

Introducând (2) și (3) în (1) găsim că:

$$E = \frac{3}{2} \frac{G}{g} \omega^2 \cos^2 \alpha \left(r^2 \tan^2 \alpha + 6h^2 + \frac{3}{2} r^2 \right)$$

(4)

Dar $\omega = 4\pi$, $\cos^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + r^2} = \frac{9}{10}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$, astfel încât:

$$E = \frac{387}{25} \pi^2 \frac{G}{g} h^2$$

(5)

R 15.3) Greutățile \vec{P}_1 și \vec{P}_2 sunt legate printr-un fir inextensibil și de greutate neglijabilă, trecut peste scripetii ficiși B și D. Atunci când greutatea \vec{P}_2 coboară greutatea \vec{P}_1 se ridică pe fața laterală AB a unei prisme ABDE, de greutate \vec{P}_3 (figura R 15.3). Unghiul făcut de AB cu orizontala este α . Știind că inițial sistemul celor trei corpuri se află în repaus și neglijând frecările, să se afle deplasarea prisme față de dușumea pentru o deplasare h a greutății \vec{P}_2 .

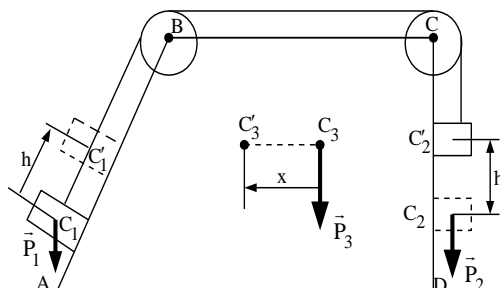


Figura R 15.3

Rezolvare: Asupra sistemului de corpuri acționează doar forțele de greutate (verticale). Centrul de masă nu se deplasează pe verticală. Notând cu C_1, C_2, C_3 pozițiile inițiale ale centrelor de masă ale celor trei corpuri, respectiv prin C_1', C_2', C_3' pozițiile aceluiași puncte după deplasarea greutateii \vec{P}_2 pe verticală cu distanța h se determină abscisa x_C a centrului de masă al sistemului corespunzătoare celor două poziții ale acestuia. Se consideră că prisma se deplasează spre stânga cu distanța x .

$$\text{La momentul inițial: } (x_C)_0 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3};$$

$$\text{La momentul final: } (x_C)_1 = \frac{P_1 (x_1 + h \cos \alpha - x) + P_2 (x_2 - x) + P_3 (x_3 - x)}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

$$\text{Cum } (x_C)_0 = (x_C)_1 \text{ obținem: } x = \frac{P_1 \cos \alpha}{P_1 + P_2 + P_3} h.$$

R 15.4) O placă omogenă de greutate \vec{G} , având frontiera un triunghi dreptunghic ABC de catete AB = a și BC = b , se rotește în jurul unei axe fixe ce conține cateta BC (figura R15.4.1). În momentul inițial viteza unghiulară a plăcii este ω_0 . Fiecare element al plăcii întâmpină în timpul mișcării o rezistență din partea aerului proporțională cu aria elementului și cu viteza sa, direcția forței de rezistență fiind perpendiculară pe suprafața elementului. Cunoscând factorul de proporționalitate k , să se determine legea de variație $\omega = \omega(t)$ a vitezei unghiulare în mișcarea de rotație a plăcii.

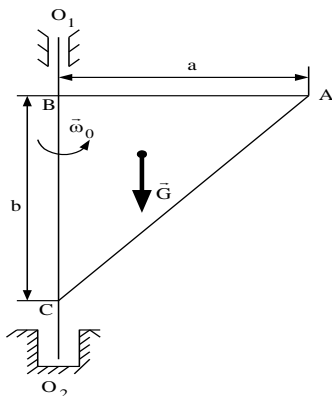


Figura R 15.4.1

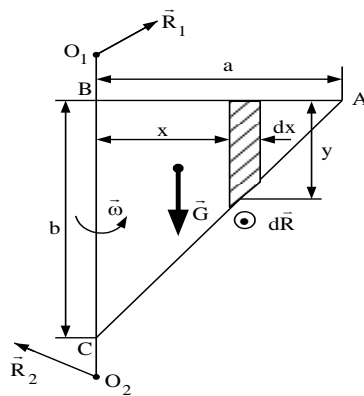


Figura R 15.4.2

Rezolvare: Notând cu \vec{R}_1 și \vec{R}_2 reacțiunile din articulațiile O_1 și O_2 și cu $d\vec{R}$ forța de rezistență a aerului care acționează normal pe elementul dreptunghiular de dimensiuni dx , respectiv y , se aplică teorema momentului cinetic în raport cu punctul B și se obține:

$$\frac{d\vec{K}_B}{dt} = \vec{M}_B(\vec{R}_1) + \vec{M}_B(\vec{R}_2) + \vec{M}_B(\vec{R}) + \int_A \vec{M}_B(d\vec{R})$$

(1)

unde integrala se extinde pe întreg domeniul ocupat de placă (figura R 15.4.2).

Proiectând ecuația vectorială (1) pe axa BC și observând că $\vec{M}_{BC}(\vec{R}_1) = \vec{M}_{BC}(\vec{R}_2) = \vec{0}$ (deoarece axa BC conține punctele O_1 și O_2) și că $\vec{M}_{BC}(\vec{G}) = \vec{0}$ (deoarece BC este paralelă cu direcția gravitației), rezultă:

$$\frac{dK_{BC}}{dt} = M_R = \int_D x dR$$

(2)

Momentul cinetic al plăcii ABC, aflată în mișcare de rotație, se determină cu formula:

$$K_{BC} = J_{BC} \cdot \omega$$

(3)

Se poate arăta (vezi capitolul 13) că $J_{BC} = \frac{G a^2}{6g}$. Forța elementară de rezistență a aerului corespunzătoare unui element de arie dA este $dR = k \cdot dA \cdot v = k y dx v = k \frac{b}{a} (a-x) \omega x dx$, astfel încât momentul rezultat al forțelor rezistente în raport cu axa de rotație va fi:

$$M_R = -k \frac{b}{a} \omega \int_0^a (a-x) x dx = -\frac{k a^3}{6b} \omega$$

(4)

Din (2-4) se obține ecuația diferențială cu variabile separabile:

$$\frac{G}{g} \frac{d\omega}{dt} = -k \frac{a}{b} \omega$$

(5)

Soluția sa particulară (în condițiile inițiale $t_0 = 0, \omega = \omega_0$) este:

$$\omega = \omega_0 \cdot \exp\left(-\frac{g k a}{G b} t\right)$$

(6)

R 15.5) Pe o bară rectilinie aflată în poziție verticală se deplasează (în jos) o culisă de greutate $G = 20 \text{ N}$ prinsă prin intermediul unui resort de constantă elastică $k = 3 \text{ N/m}$ de

punctul fix O (figura R 15.5.1). Știind că la momentul inițial culisa se află în repaus în punctul A și că lungimea resortului în stare nedeformată este $l_0 = 4\text{ m}$, să se determine viteza culisei în punctul B. Se mai cunosc distanțele $AB = h = 6\text{ m}$, $OA = l_1 = 8\text{ m}$.

Figura R 15.5.1

Figura R 15.5.2

Rezolvare: La momentul de timp t culisa se află în punctul M și are viteza v . Se aplică teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic între momentele de timp la care culisa se găsește în punctele A și B:

$$E_B - E_A = L_{A-B}$$

(1)

unde $E_A = 0$, $E_B = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_B^2$ (figura R 15.5.2).

Reacțiunea normală este perpendiculară pe deplasarea $d\vec{r}$ și nu produce lucru mecanic, lucrul mecanic al greutatei este $L_{A-B}^G = G \cdot h = 120\text{ N m}$ iar lucrul mecanic al forțelor elastice este dat de relația:

$$L_{A-B}^{F_{el}} = \int_{AB} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = - \int_{AB} F_{el} dr \cos \theta$$

(2)

Dar

$$\cos \theta = \frac{AM}{OM} = \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}}, dr = dx, F_{el} = k \Delta l = k(\sqrt{l_1^2 + x^2} - l_0)$$

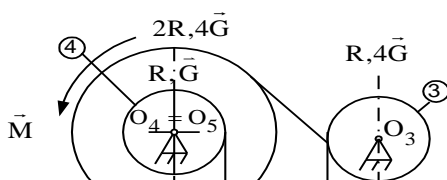
astfel încât:

$$L_{A-B}^{F_{el}} = - \int_0^h k(\sqrt{l_1^2 + x^2} - l_0) \cdot \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} dx = \left(-\frac{k x^2}{2} + k l_0 \sqrt{l_1^2 + x^2} \right) \Big|_0^h = -12\text{ N m}$$

(3)

Se obține $v_B = 10,29\text{ m/s}$.

R 15.6) Se consideră mecanismul de ridicat din figura R 15.6.1, format din corpuri omogene, legate între ele prin fire perfect flexibile și inextensibile. Frecările sunt neglijabile. Pentru ridicarea sarcinii $Q = \frac{19}{2} G$ mecanismul este acționat printr-un cuplu



de moment $M = \frac{87}{4} GR$. Presupunând că mecanismul pornește din repaus, să se determine legea de mișcare a sarcinii Q.

Figura R 15.6.1

Rezolvare: Vom folosi, de la caz la caz, teorema mișcării centrului de masă și / sau teorema momentului cinetic.

Corpul de greutate Q (figura R 15.6.2)

Teorema mișcării centrului de masă proiectată pe Oy:

$$\frac{Q}{g} a = S_1 - G$$

(1)

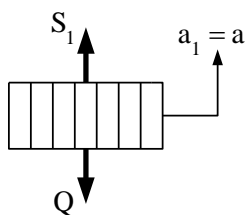


Figura R 15.6.2

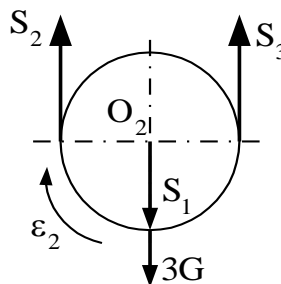


Figura R 15.6.3

Corpul de greutate 3 G (figura R 15.6.3)

Teorema mișcării centrului de masă proiectată pe Oy:

$$\frac{3G}{g} a_2 = S_2 + S_3 - S_1 - 3G$$

(2)

Teorema momentului cinetic în raport cu punctul O_2 , proiectată pe $O_2 z$:

$$J_{O_2} \varepsilon_2 = -S_3 R + S_2 R$$

(3)

Corpul de greutate $4G$ (figura R 15.6.4)

Teorema momentului cinetic în raport cu O_3 , proiectată pe $O_3 z$:

$$J_{O_3} \varepsilon_3 = S_4 R - S_3 R$$

(4)

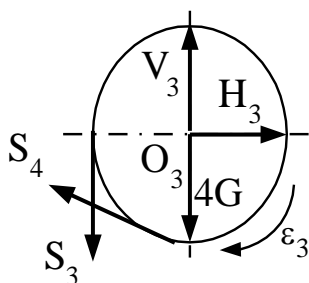


Figura R 15.6.4

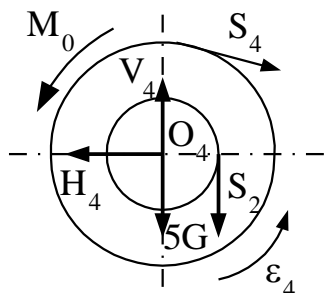


Figura R 15.6.5

Corpul de greutate $5G$ (figura R 15.6.5)

Teorema momentului cinetic în raport cu O_4 , proiectată pe $O_4 z$:

$$J_{O_4} \varepsilon_4 = M_0 - S_4 \cdot 2R - S_2 R$$

(5)

Dar:

$$J_{O_2} = \frac{3GR^2}{2g}, J_{O_3} = \frac{2GR^2}{g}, J_{O_4} = \frac{4G \cdot (2R)^2}{2g} + \frac{GR^2}{2g} = \frac{17GR^2}{2g}$$

(6)

iar studiul cinematic conduce la relațiile:

$$a_2 = a, \varepsilon_2 = \frac{a}{3R}, \varepsilon_3 = \frac{4a}{3R}, \varepsilon_4 = \frac{2a}{3R}$$

(7)

Din (1-7) se obține accelerația greutateii Q:

$$a = \frac{69G - 6Q}{41G + 6Q} g$$

(8)

15.5. Probleme propuse

15.5.1. Teste clasice

TC 15.1) Două bărci de greutate \vec{G} se deplasează în același sens cu aceeași viteză \vec{v} .

La un moment dat din prima barcă se aruncă spre cea de-a doua o greutate \vec{P} cu viteză \vec{u} (față de bărci). Să se determine vitezele celor două bărci după aruncarea greutății, respectiv, primirea greutății.

TC 15.2) O roată de rază r , care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul axei sale de simetrie, este apăsată de un sabot de frână AB cu forța radială constantă F (figura TC 15.2.1). Știind că momentul de inerție al roții în raport cu axa de rotație este J și că roata se oprește după t_1 secunde ca urmare a frecării dintre ea și sabot, se cere :

- Coeficientul de frecare μ dintre sabot și roată ;
- Numărul de rotații efectuat de roată până la momentul opririi.

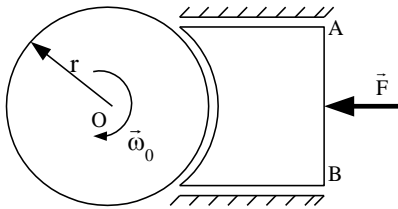


Figura TC 15.2.1

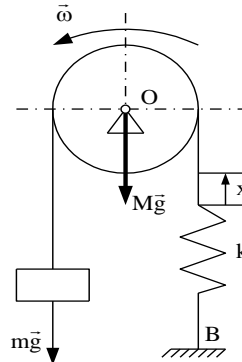
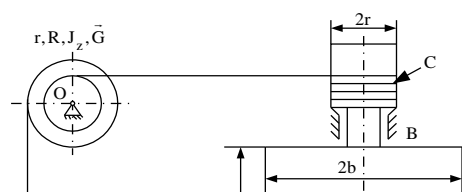


Figura TC 15.3.1

TC 15.3) Peste un scripete ce se rotește în jurul axei orizontale Oz trece un fir inextensibil ce poartă la unul din capete o sarcină de masă m . Celălalt capăt al firului este prins de un arc vertical ce are extremitatea B fixă. Forța de tensiune a arcului este proporțională cu alungirea lui, factorul de proporționalitate fiind k (figura TC 15.3.1). Să se determine perioada oscilațiilor sarcinii știind că masa scripetelui este M și că firul nu alunecă pe scripete.

TC 15.4) Se consideră sistemul de corpuri din figura TC 15.4.1, care pornește din repaus sub acțiunea propriilor greutăți. Discul de greutate Q și rază R se poate deplasa pe un plan orizontal și este legat prin intermediul unui fir flexibil și inextensibil de un corp de greutate P , aflat pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală. Firul este înfășurat pe discul de rază r al unui troliu și se desfășoară de pe discul de rază R al aceluiași troliu. Momentul de inerție al troliului în raport cu axa de rotație este J .

Considerând că discul de greutate Q se rostogolește fără să alunece pe planul orizontal, coeficientul de frecare de rostogolire fiind s , iar corpul de greutate P se mișcă pe planul înclinat cu frecare, coeficientul frecării de alunecare fiind μ , să se studieze mișcarea greutății P și să se determine accelerația sa.



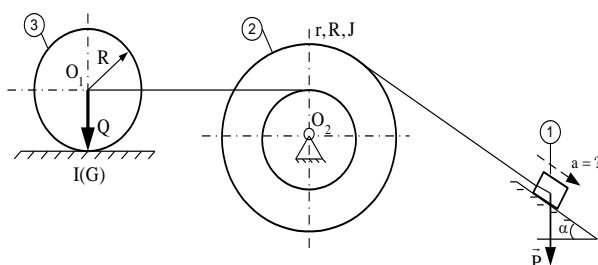


Figura TC 15.4.1

Figura TC 15.5.1

TC 15.5) O placă omogenă de greutate P , având lăţimea $2b$ şi înălţimea h , se poate roti în jurul axului vertical AB pe care se găseşte şi cilindrul C de rază r şi greutate neglijabilă (figura TC 15.5.1). Pe acest cilindru este înfăşurat un fir al cărui capăt trece peste scripetele de rază r al unui troliu care are momentul de inerţie J_{z_1} în raport cu axa de rotaţie. Sistemul este pus în mişcare de greutatea Q , atârnată la capătul firului ce trece peste scripetele de rază R al troliului. În timpul mişcării fiecare element de arie al plăcii întâmpină rezistenţa aerului, care este proporţională cu aria şi viteza elementului, factorul de proporţionalitate fiind k .

- Să se studieze mişcarea sistemului şi să se determine legea mişcării şi legea de variaţie a vitezei unghiulare a plăcii ;
- Să se determine tensiunile din fire ;
- Presupunând că la un moment t_1 se desprinde greutatea Q , să se determine timpul t_2 după care viteza unghiulară se reduce la jumătate.

15.5.2. Teste grilă

TG 15.1) O barcă de greutate \vec{G} şi lungime l se găseşte în repaus şi atinge cu prova debarcaderul (figura TG 15.1). Un om de greutate \vec{P} aflat în acest moment în mijlocul bărcii începe să se deplaseze spre mal. Să se determine distanţa cu care se va depărta barca de mal atunci când omul va ajunge la capătul bărcii.

- $x = \frac{P}{G} \cdot \frac{l}{2}$; b) $x = \frac{P}{P+G} \cdot \frac{l}{3}$; c) $x = \frac{G}{P+G} \cdot \frac{l}{2}$; d) $x = \frac{P}{P+G} \cdot \frac{l}{2}$.

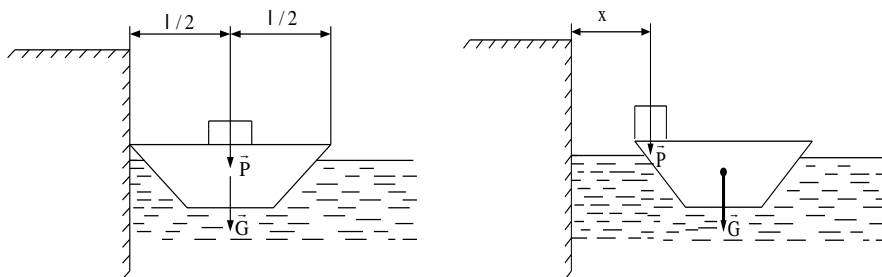


Figura TG 15.1

TG 15.2) Un pendul este lăsat să oscileze liber în planul vertical, din poziția inițială dată prin unghiul θ_0 (figura TG 15.2). Cunoșcând masa m a punctului material și lungimea l a firului, să se determine perioada T a micilor oscilații.

a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g}}$; b) $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$; c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; d) $T = \pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$.

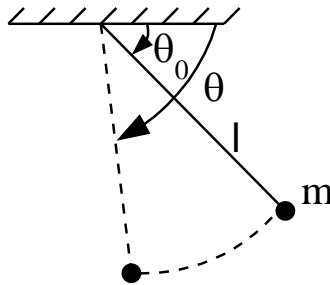


Figura TG 15.2

15.6. Indicații și răspunsuri

TC 15.1) Deoarece forțele care acționează asupra sistemului sunt verticale impulsul pe direcția x rămâne constant (figura TC 15.1) . Se aplică conservarea impulsului pentru sistemul format din barca 1 și greutatea 3 între momentele de timp t_1 , respectiv t_2 , la care greutatea 3 este în barcă , respectiv , în aer :

$$H_1 = H_2 \Rightarrow \frac{G}{g} v + \frac{P}{g} v = \frac{G}{g} v_1 + \frac{P}{g} (v - u)$$

Se obține : $v_1 = v + \frac{P}{G} u > v$.

Pentru determinarea vitezei v_2 a bărcii 2 după primirea greutății se aplică conservarea impulsului pentru sistemul format din barca 2 și greutatea 3 între momentele de timp t_2 , respectiv t_3 , la care greutatea este în aer, respectiv , în barca 2:

$$H'_2 = H'_3 \Rightarrow \frac{P}{g} (v - u) + \frac{G}{g} v = \frac{P}{g} v_2 + \frac{G}{g} v_2$$

Rezultă : $v_2 = v - \frac{P}{P + G} u < v$.

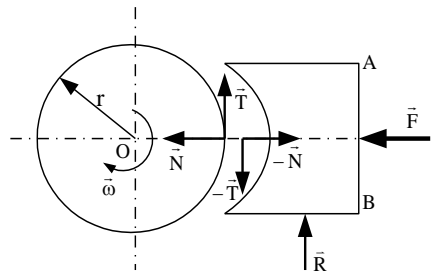
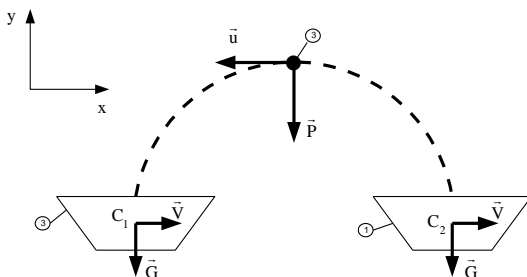


Figura TC 15.1

Figura TC 15.2.2

TC 15.2) a) Izolând cele două corpuri (sabotul și roata) se obține situația din figura TC 15.2.2. Ecuațiile de echilibru pentru sabot sunt :

$$\sum X_i = N - F = 0 \quad , \quad \sum Y_i = R - T = 0 \quad , \quad T = \mu N$$

(1)

Aplicând teorema momentului cinetic în raport cu punctul O și proiectând relația vectorială obținută pe direcția axei de rotație se găsește ecuația de mișcare a roții:

$$J\varepsilon = -T r$$

(2)

Integrând ecuația (2) în raport cu timpul și ținând cont de condiția inițială $t = 0: \omega = \omega_0$, se obține legea de variație a vitezei unghiulare :

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu r F}{J} t$$

(3)

Coeficientul de frecare μ se determină impunând condiția ca roata să se oprească după t_1 secunde : $t = t_1; \omega = 0$. Rezultă :

$$\mu = \frac{J \omega_0}{r t_1 F}$$

(4)

b) Observând că $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ și integrând încă o dată ecuația (3) în raport cu timpul se obține legea de mișcare a roții :

$$\phi(t) = \omega_0 t - \frac{\mu r F}{2J} t^2$$

(5)

Numărul de rotații efectuat de roată până în momentul opririi se determină observând că o rotație completă corespunde unui unghi $\phi = 2\pi$. Aceasta va fi :

$$n_{\text{rotatii}} = \frac{\phi(t_1)}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi}$$

(6)

TC 15.3) Se notează cu x deplasarea corpului de masă m la momentul de timp t (figura TC 15.3.2) .

(1) Corpul 1 : $ma = mg - T$ (teorema mișcării centrului de masă)

(2) Corpul 2 : $J_O \varepsilon = TR - F_{el} R$ (teorema momentului cinetic față de O)

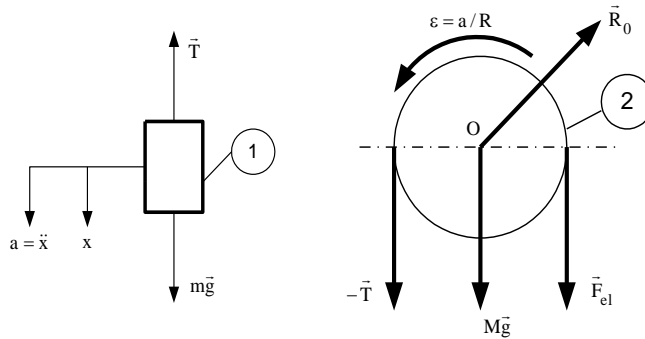


Figura TC 15.3.2

Dar $J_O = \frac{MR^2}{2}$, $F_{el} = kx$, $a = \ddot{x}$, astfel încât din (1) și (2) se obține ecuația diferențială :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{M+2m} x = \frac{2m}{M+2m} g \quad (3)$$

Notând cu $p = \sqrt{\frac{2k}{M+2m}}$ pulsația proprie a oscilației , perioada mișcării va fi :

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{M+2m}{2k}} \quad (4)$$

TC 15.4) Sensul mișcării sistemului este dat de greutatea P , care coboară pe planul înclinat. Pentru studiul mișcării se aplică teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic sub formă finită :

$$E_f - E_i = L_{i,f}$$

(1)
unde :

$E_i = 0$ - energia cinetică a sistemului în momentul începerii mișcării. Ea este nulă deoarece sistemul pornește din repaus.

E_f - energia cinetică a sistemului la un moment arbitrar de timp t . Greutatea P a parcurs în acest interval de timp spațiul x .

$L_{i,f}$ - lucrul mecanic al forțelor exterioare și de legătură ce acționează asupra corpurilor sistemului între cele două momente de timp.

Legătura între caracteristicile cinematice ale mișcării corpurilor este dată în tabelul de mai jos (vezi și figura TC 15.4.2) .

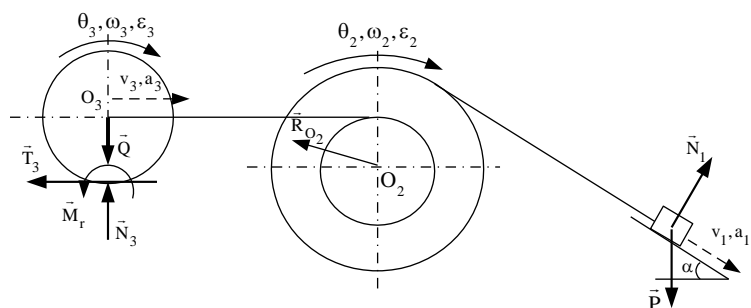


Figura TC 15.4.2

Corp	Tipul mișcării	Deplasare	Viteza	Accelerație
1	Translație	$x_1 = x$	$\dot{x}_1 = v_1 = x$	$\ddot{x}_1 = a_1 = x$
2	Rotație	$\theta_2 = \frac{x}{R}$	$\dot{\theta}_2 = \omega_2 = \frac{x}{R}$	$\ddot{\theta}_2 = \varepsilon_2 = \frac{x}{R}$
3	Plan – Paralelă	$x_3 = \frac{r}{R} x$	$\dot{x}_3 = v_3 = \frac{r}{R} \dot{x}$	$\ddot{x}_3 = a_3 = \frac{r}{R} \ddot{x}$
		$\theta_3 = \frac{r}{R^2} x$	$\dot{\theta}_3 = \omega_3 = \frac{r}{R^2} \dot{x}$	$\ddot{\theta}_3 = \varepsilon_3 = \frac{r}{R^2} \ddot{x}$

Energia cinetică a celor trei corpuri la momentul t este :

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{x}^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} J_{O_2} \omega^2 = \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

(2)

$$E_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{r}{R} \dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{R^2}{2} \left(\frac{r}{R^2} \dot{x} \right)^2$$

Energia cinetică a sistemului la același moment de timp se obține prin sumarea energiilor cinetice ale corpurilor componente :

$$E_f = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} + \frac{3}{2g} \frac{r^2}{R^2} Q + \frac{J}{R^2} \right) \dot{x}^2$$

(3)

Singurele forțe care dau lucru mecanic sunt forța de greutate P și forța de frecare T_1 , celelalte forțe fiind normale pe deplasare (Q, N_1, N_2), cu punct de aplicație fix (R_{O_2}) sau aplicate în centrul instantaneu de rotație (T_3). Lucrul mecanic nenul se mai obține și datorită momentului de frecare de rostogolire M_r . Adunând aceste lucruri mecanice se obține valoarea :

$$L_{i,f} = P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)x - M_r \theta_3$$

(4)

unde $M_r = s N_3 = s Q$.

Din relația (4) și tabelul de mai sus se obține :

$$L_{i-f} = \left(P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - s Q \frac{r}{R^2} \right) x$$

(5)

Notând :

$$A = \frac{P}{g} + \frac{3}{2g} \frac{r^2}{R^2} Q + \frac{J}{R^2}, \quad B = P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - s Q \frac{r}{R^2}$$

(6)

relația (1) capătă forma :

$$\frac{1}{2} A \dot{x}^2 - 0 = B x$$

(7)

Derivând această ecuație diferențială în raport cu timpul și simplificând cu \dot{x} , găsim valoarea accelerației corpului de greutate P :

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{B}{A} = \frac{P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - s Q \frac{r}{R^2}}{\frac{P}{g} + \frac{3}{2g} \frac{Q r^2}{R^2} + \frac{J}{R^2}}$$

(8)

Observație : Din relația de mai sus și tabelul T 12.8 se poate trage concluzia că toate corpurile sistemului au mișcări uniform accelerate (de accelerații constante).

TC 15.5) a) Se separă cele trei corpuri ale sistemului, se introduc forțele exterioare date și forțele de legătură și se aplică teoremele mișcării centrului de masă și momentului cinetic (în funcție de mișcarea corpului studiat).

Corpul de greutate Q (figura TC 15.5.2)

Teorema mișcării centrului de masă proiectată pe Oy :

(1)

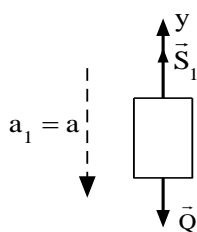


Figura TC 15.5.2

$$\frac{Q}{g} a = Q - S_1$$

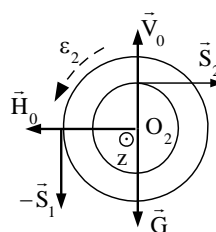


Figura TC 15.5.3

Troliul (figura TC 15.5.3)

Teorema momentului cinetic în raport cu O_2 pe $O_2 z$:

$$J_{z_1} \varepsilon_2 = S_1 R - S_2 r$$

(2)

Placa plana și cilindrul (figura TC 15.5.4)

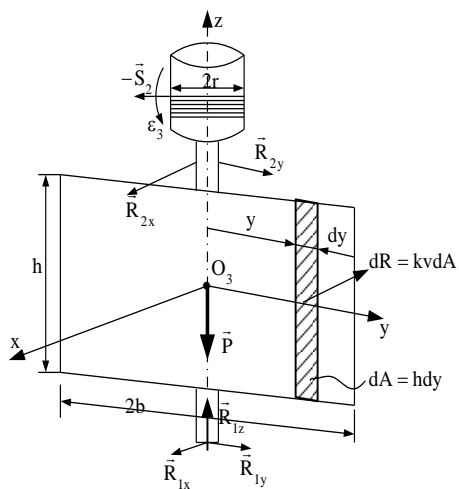


Figura TC 15.5.4

Teorema momentului cinetic în raport cu O_3 pe $O_3 z$:

$$J_{z_2} \varepsilon_3 = S_2 R - M_R$$

(3)

unde M_R reprezintă momentul datorat forțelor de rezistență a aerului iar

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \frac{a}{R} \quad , \quad M_R = \int_A y \cdot k v \cdot dA \quad , \quad J_{z_3} = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \cdot \rho h dy = \frac{2}{3} \rho h b^3$$

(4)

Dar $P = M_{placa} \cdot g = 2 \rho h b g$, astfel încât $J_{z_2} = \frac{2}{3} \frac{P}{g} b^2$.

Momentul M_R se calculează după cum urmează :

$$M_R = k \int_{-b}^b y \cdot \omega y \cdot h dy = h k \omega \int_{-b}^b y^2 dy = \frac{2}{3} k h b^3 \omega$$

(5)

deoarece $v = \omega y$, $dA = h dy$.

Notând $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, din ecuațiile (1 - 3) rezultă valorile tensiunilor în fire în funcție de accelerația unghiulară ε :

$$S_1 = Q \left(1 - \frac{\varepsilon R}{g} \right) \quad , \quad S_2 = Q \left(1 - \frac{\varepsilon R}{g} \right) \frac{R}{r} - J_{z_1} \frac{\varepsilon}{R}$$

(6)

precum și ecuația diferențială în necunoscuta viteza unghiulară $\omega \left(\varepsilon = \dot{\omega} \right)$:

$$\alpha \dot{\omega} + \beta \omega = Q R$$

(7)

unde $\alpha = \frac{Q}{g} R^2 + J_{z_1} + \frac{2}{3} \frac{P}{g} b^2$, $\beta = \frac{2}{3} h k b^2$. Deoarece $\omega = \dot{\varphi}$, unde $\varphi = \varphi(t)$ este unghiul descris de planul plăcii față de poziția pe care aceasta o ocupa la momentul inițial, se obține următoarea ecuație diferențială liniară de ordinul doi neomogenă :

$$\alpha \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} = Q R$$

(8)

Soluția generală a acestei ecuații este :

$$\varphi(t) = \frac{Q R}{\beta} \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} + 1 \right) + t \right]$$

(9)

și reprezintă legea de mișcare a plăcii plane. Viteza unghiulară și accelerația unghiulară în mișcarea de rotație a plăcii se obțin prin derivarea legii de mișcare (9) :

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{QR}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \right), \quad \varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \frac{QR}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}$$

(10)

b) Tensiunile din fire rezultă din relațiile (6) :

$$S_1 = Q \left(1 - \frac{Q}{g} \frac{R^2}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \right), \quad S_2 = Q \frac{R}{r} \left[1 - \left(\frac{QR^2}{\alpha g} + \frac{J_{z_1}}{\alpha} \right) e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \right]$$

(11)

c) Pentru $Q = 0$, valoarea constantei α devine $\alpha_1 = J_{z_1} + \frac{2}{3} \frac{P}{g} b^2$ iar ecuația diferențială

devine omogenă, $\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} = 0$, și are soluția generală :

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\beta}{\alpha_1} t}$$

(12)

Impunând condițiile inițiale, $t = 0: \varphi = 0, \dot{\varphi} = \omega_1$, se obține soluția particulară

$$\varphi(t) = \frac{\alpha_1}{\beta} \omega_1 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\alpha_1} t} \right). \text{ Timpul } t_2 \text{ se determină punând condiția ca viteza}$$

unghiulară $\omega = \dot{\varphi}$ să fie jumătate din valoarea ω_1 înregistrată în momentul desprinderii

greutății Q , adică $\dot{\varphi}(t_2) = \omega_1 e^{-\frac{\beta}{\alpha_1} t_2} = \frac{\omega_1}{2}$, de unde :

$$t_2 = \frac{\alpha_1}{\beta} \ln 2$$

(13)

TG 15.1) Forțele care acționează asupra sistemului bară-om sunt verticale astfel încât impulsul (deci și viteza centrului de masă) se conservă pe orizontală. Deoarece la momentul inițial sistemul este în repaus viteza centrului de masă va rămâne nulă în tot timpul mișcării, adică centrul de masă nu se modifică în timpul mișcării:

$$(x_C)_{t=t_{\text{initial}}} = (x_C)_{t=t_{\text{final}}} \Rightarrow \frac{l}{2} = \frac{\frac{P}{g} x + \frac{Q}{g} \left(x + \frac{l}{2} \right)}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}} \Rightarrow x = \frac{P}{P+G} \cdot \frac{l}{2}.$$

Răspuns corect: **d)**

TG 15.2) Fie θ unghiul format de fir cu verticala la momentul arbitrar de timp t . Se aplică teorema momentului cinetic față de punctul de prindere al firului O: $J_O \cdot \varepsilon = \sum M_O (*)$. Singura forță care dă moment față de O este greutatea $G = mg$ iar $J_O = ml^2$. Din (*) găsim ecuația diferențială $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$. Pentru micile oscilații ale firului se poate considera $\sin \theta \cong \theta$, de unde ecuația de mișcare $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$. Soluția ei este de forma $\theta(t) = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt$, unde $p = \sqrt{\frac{g}{l}}$ reprezintă pulsația mișcării. Deoarece $T = \frac{2\pi}{p}$, răspunsul corect este c).